現代物理最前線 7

大槻義彦 編

格子上のカイラルフェルミオン

青木愼也

モット-アンダーソン転移の臨界指数

伊藤公平

超弦理論と時空

夏梅　誠

共立出版株式会社

刊行にあたって

いよいよ 20 世紀科学文明から 21 世紀の科学文明に移る．20 世紀の物理学を振り返れば，その進歩・発展は，想像を絶するものがある．原子・素粒子はもとより，クォークからブラックホール，宇宙のはてまで，物理学は解明してきた．そしていま，生命，脳新素材，複雑系の解明まで突き進んでいる．21 世紀はどんな科学文明になるのか，考えれば，むしろ恐ろしくさえなってしまう．このような現状にあって，まず何よりも現代物理学の各分野を，十分知っておくことが要求される．わが国の物理学者，研究者，物理教育者は，他の先進国の人びとよりも，物理学の異なる分野にうといと言われる．自分の専門分野には，きわめて高い識見をもっているのに，ほんの少し専門をはずれてしまうと，知識もないし，興味ももたなくなるという傾向にあるとされる．

このような現状を少しでも改善しようとするものが，前シリーズ『物理学最前線』とか物理科学雑誌『パリティ』である．幸い，前シリーズ『物理学最前線』は好評を得て，31 巻まで刊行することができた．

そこで今回，まったく新しいシリーズとして，『現代物理最前線』を世に送ることにした．前シリーズと比べて，今シリーズは現代物理の生々しい現状の最新情報を満載するものである．

2000 年 2 月

大槻　義彦

目　次

格子上のカイラルフェルミオン＝青木慎也

モット-アンダーソン転移の臨界指数＝伊藤公平

超弦理論と時空＝夏梅 誠

格子上のカイラルフェルミオン

青木慎也

1章 はしがき

素粒子物理学は物質の最小構成単位である素粒子の性質を解明する学問であり，素粒子理論の目標は素粒子を支配する基本法則を探し出すことである．本論に入る前に素粒子理論の現状を簡単に解説しよう．

はじめに現在の素粒子の種類とその分類を紹介しよう．原子の構成要素のひとつである電子などは軽粒子と呼ばれる素粒子である．軽粒子にはそのほかに電子の仲間であるミュー粒子，タウ粒子とそれぞれに対応した3種類のニュートリノがある．原子核の構成要素である陽子や中性子とそれらの間の力を媒介するパイ中間子などはハドロンと呼ばれているが，現在は素粒子ではなくクォークと呼ばれる素粒子の束縛状態と考えられている．

現在，クォークは6種類発見されている．6種類は2つが組になって世代と呼ばれ，第1世代はアップ，ダウン，第2世代はチャーム，ストレンジ，第3世代はトップ，ボトムと名前がついており，軽粒子の電子とそのニュートリノ，ミュー粒子とそのニュートリノ，タウ粒子とそのニュートリノにそれぞれ対応している．つまり，1世代は2つのクォークと1つの軽粒子とそれに対応するニュートリノの計4つの素粒子で構成されている．

素粒子の性質を決めるのはその相互作用であり，現在4種類の相互作用が知られているが，それらを大きさの順に紹介しよう．核力の原因になっている強い相互作用はクォークだけに作用し，その結果，陽子などのクォークの束縛状態が現れる．電磁気的相互作用はわれわれにもっともなじみが深い相互作用であり，電荷をもっている素粒子に作用する．原子核のベータ崩壊に関与するのは弱い相互作用であり，ほとんどすべての素粒子に作用する．一番弱いのは万有引力に関与する重力相互作用であり，すべての素粒子に作用する．

相互作用を媒介するものもやはり素粒子である．強い相互作用を媒介する粒

子はグルーオンと呼ばれ，その質量は0と考えられているが，強い相互作用自体は短距離力である．これは閉じ込めと呼ばれる性質のためである．電磁相互作用を媒介とする粒子は光子，つまり光である．光もやはり質量0であり，長距離力である．弱い相互作用を媒介する粒子は正負の電荷をもった2つのWボソンと電気的に中性なZボソンであり，その質量は非常に大きく，したがって弱い相互作用は短距離力である．重力相互作用を媒介する粒子は重力子(グラビトン)と呼ばれているが，実験的にはまだ見つかっていない．重力が遠距離力なので，その質量はゼロであると思われる．

素粒子の理論を記述するには「相対論的場の量子論」が用いられる．これは通常の量子力学と相対性理論を融合させ，(粒子を量子化するのではなく)時空間の各点で定義される場を量子化するものである*．場を量子化すると，エネルギーや運動量の確定した状態が現れるが，それが「粒子」と解釈される．そして，場の量子論の枠内では粒子数の変化，つまり粒子の生成，消滅が可能になる．

素粒子の相互作用を記述する「場の量子論」として現在もっとも有望なのは，「ゲージ理論」である．これを簡単に説明しよう．相互作用をしていない電子の理論は大域的な(時空間に依存しない) $U(1)$ 対称性をもっている．これを局所的な(変換が時空間に依存する) $U(1)$ 対称性に拡張しようとすると，ゲージ場という新たな場の導入が必要になり，その結果，ゲージ場と電子の相互作用が生成される．$U(1)$ の場合のゲージ場は電磁場であり，生成された相互作用は電磁相互作用で，この理論は量子電磁力学と呼ばれている．ここに現れる局所的な変換はゲージ変換と呼ばれ，それに対する不変性はゲージ不変性，理論全体はゲージ理論と総称される．ゲージ不変性のためにゲージ場の質量は通常はゼロになっており，これは電磁相互作用が長距離力であることに対応している．

変換の対称性を $U(1)$ からより複雑な群，例えば $SU(N)$ などの非可換群に変えることで，より複雑な相互作用が記述できる．現在は，強い相互作用は $SU(3)$ ゲージ理論で記述されると考えられており，3に対応する自由度がカラーと呼ばれることから，量子色力学(quantum chromodynamics; QCD)と命名されて

* 場の例としては電磁場が挙げられる．電磁場を量子化したものは量子電磁力学と呼ばれ，場の量子論の最も成功した例である．

いる．ゲージ場はグルーオンでありその質量はゼロであるが，SU(3) という非可換群の性質でグルーオン自身もカラーをもち，グルーオンどうしが相互作用をする*．その結果，質量ゼロであるにもかかわらず，近距離相互作用になっている．

現在では，電磁相互作用と弱い相互作用はひとつの $SU(2) \times U(1)$ ゲージ理論に統一されると考えられ，この理論はワインバーグ-サラム (Weinberg-Salam) 理論と呼ばれている．この理論ではひとつの世代内の 2 つのクォーク (あるいは軽粒子) に $SU(2)$ が作用する．群の自由度の数に対応してゲージ場は 4 つあるが，「自発的対称性の破れ」という現象のために，そのうちの 3 つが大きな質量をもち，W ボソンや Z ボソンとなる．残りのひとつがゼロ質量の電磁場である．つまり，弱い相互作用と電磁相互作用の違いはこのゲージ場の質量の違いであり，その質量が無視できるほど大きなエネルギーでは両者の違いはないと考えられている．

現在，量子色力学とワインバーグ-サラム理論を合わせたものは素粒子の標準理論と呼ばれている．この両者をひとつのゲージ理論で統一しようとする多くの試みがあり，それらは「大統一理論」と総称されるが，実験的にはまだ確認されていない．重力もやはりゲージ理論と考えられ，その古典論はよく理解されているが，矛盾のない重力の量子論はいまだにわかっていない．現在は，重力を含めたすべての相互作用を統一する究極理論の候補として「ストリング理論」が注目を集め，多くの研究がなされているが，その点は本論では触れない．

ゲージ理論では相互作用を媒介するスピン 1 のゲージ場 (グラビトンはスピン 2) とクォークなどのスピン 1/2 の物質場が存在する．スピン 1/2 の粒子は相対性理論の要請からディラック方程式 (Dirac equation) に従うが，そのためカイラル対称性という特別な対称性が存在する．これが本論のテーマであり，次章でこのカイラル対称性について詳しく見ていこう．

---

* $U(1)$ ゲージ理論のゲージ場である電磁波は電荷をもたないので，電磁場どうしは相互作用しない．

2章 フェルミオンとカイラル対称性

クォーク(quark)などの物質を構成するスピン 1/2 のフェルミオン(フェルミ粒子)の波動関数 $\psi(x)$ が満たすディラック方程式 $\left(\sum_{\mu=1}^{4}\gamma_\mu D^\mu + m\right)\psi = 0$ は，次に与えられる「作用」(action)

$$S = \int \mathrm{d}^4 x \, \bar{\psi}(x) \left(\sum_{\mu} \gamma_\mu D^\mu + m\right) \psi(x) \tag{2.1}$$

から変分によって導かれる．ここで，m は粒子の質量，$D^\mu = \partial^\mu + igA^\mu$ は共変微分 (covariant derivative)，A^μ はゲージ場 (gauge field) である．4 次元のガンマ行列 γ_μ は $\gamma_5 = \gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4$ と反交換する ($\gamma_5\gamma_\mu = -\gamma_\mu\gamma_5$) ので，フェルミオンがゼロ質量 ($m = 0$) の場合，この作用はカイラル (chiral) 変換

$$\psi' = \mathrm{e}^{i\theta\gamma_5}\psi, \qquad \bar{\psi}' = \bar{\psi}\mathrm{e}^{i\theta\gamma_5} \tag{2.2}$$

に対して不変になっている．これがカイラル対称性(chiral symmetry)であり，フェルミオンのもつ重要な性質のひとつである．

実際，カイラル対称性は素粒子理論において重要な役割を果たしてきた．

強い相互作用をする素粒子であるハドロンのなかでパイ中間子だけが他の粒子より軽いことはひとつの謎であったが，パイ中間子をカイラル対称性の自発的破れ(spontaneous breakdown of chiral symmetry)に伴う南部-ゴールドストン(Goldstone)粒子と考えると説明がつく．南部-ゴールドストン粒子はゼロ質量であるが，カイラル対称性を壊すわずかなクォーク質量がパイ中間子に小さな質量を与えると考えるのである．

素粒子の統一理論を考えた場合，そのエネルギー・スケールは現在の素粒子の質量に比べてはるかに大きいはずである．その場合，“素粒子”の質量がその大きなエネルギー・スケールと同程度にならずにわれわれの世界で観測される

ためには，何らかの理由が必要である．相互作用を媒介するスピン 1 のゲージ場はゲージ対称性 (gauge symmetry) によってゼロ質量が保証されるが，物質を構成するスピン 1/2 のフェルミオン (fermion) は，カイラル対称性によって質量が軽いことが保証されている*.

このようにカイラル対称性は素粒子物理学のいろいろなところに顔を出してくる．この点をさらに詳しく調べ，カイラル対称性が素粒子の力学的な性質をどのように規定しているかを見るためには，素粒子の力学を記述する場の量子論の枠組みの中でカイラル対称性を定式化することが必要になってくる．

* したがって，そのような理由のないスピン 0（スカラー）の素粒子はわれわれの世界のような低エネルギーでは観測されないはずで，実際に今のところ見つかっていない．スカラー (scalar) の素粒子の候補としては，ゲージ対称性を自発的に破りゲージ場やクォークなどに質量を与えるヒッグス (Higgs) 粒子が挙げられるが，その質量は対称性を仮定しないと 1 TeV 程度，超対称性と呼ばれる新たな対称性を考えると 100–200 GeV 程度と予想されている．

3章 格子上の場の量子論

場の量子論(quantum field theory)は(非可算)無限自由度の量子力学であり，数学的に厳密に定義するのはたいへん難しい理論体系である．通常は，厳密に解くことのできる自由場のまわりでの摂動展開(perturbative expansion)で理論を定義しているが，強い相互作用(strong interaction)などのように摂動論(perturbation theory)が機能しない場合もあるので，摂動展開に依存しない定義が必要である．そのような定義として現在もっとも体系的に整備されているのが，「格子上の場の理論」(field theory on the lattice)である[1)]．

「格子上の場の理論」では，非可算な連続時空を離散的な格子点で近似し，その上での量子論を考えるのである*．すると有限体積(finite volume)の場合の自由度はたかだか有限なので，通常の有限自由度の量子力学(quantum mechanics)になり，厳密に定義することができる．また，この系は有限体積の古典統計力学系と同等なので，そこで蓄積された知識が活用できる．

次に体積無限大(infinite volume)の極限(熱力学極限)をとる必要があるが，この場合でも自由度は可算無限であり数学的に取り扱いやすい．また，熱力学極限という名前からもわかるように，この極限の性質は統計力学ではよく知られており，多くの場合に極限の存在が保証されている．この極限で出来上がった理論は，格子間隔(lattice spacing)を a とすると，運動量の大きさの上限が π/a である「場の量子論」になっている**．つまり，格子上の場の理論は，自然に導入された運動量の切断(cut-off)により正則化(regularization)されており，場の理論の困難であった紫外発散(ultra-violate divergence)の問題はひとまず回

* 格子上の場の理論は，通常のミンコフスキー空間(Minkowski space)でなくユークリッド空間(Euclid space)で定式化される．両者の関係は連続時空ではよくわかっている．

** もちろん，無限体積の古典統計力学系と等価である．

避されている．

もちろん，われわれの時空には格子構造は見えていないので，最終的には $a \to 0$ の極限（連続極限と呼ぶ）をとる必要がある*．この極限では運動量の上限は無限大になるので，通常のように「繰り込み」(renormalization) が必要になるが，摂動展開のときのように「物理量に現れる“無限大”を“無限大”のパラメータで相殺する」というような（不自然な？）ものではなく，後述するようにきわめて自然に「繰り込み」が実現される．

このように，格子上の場の理論の連続極限によって，相互作用する「場の量子論」を構成することができる**．次の章では，格子上のフェルミオン場について述べていく．特にカイラル対称性が格子上でどのように実現されるかを考察していく．

* われわれは時空が本当に連続かどうかは知らないので，a が十分小さければ実用上の問題はない．ただし，「場の量子論」の理論構造を考える上で，ローレンツ (Lorentz) 不変性（回転不変性）が回復するであろう $a \to 0$ の極限は見通しがよい．

** 格子理論に現れる無限体積極限や連続極限を数学的にきちんと取り扱って場の理論を定義していく方法は「構成論的場の量子論」(constructive quantum field theory) と呼ばれている．

4章 格子上のフェルミオン場

4.1 フェルミオン作用の単純な格子化

フェルミオン場の作用 (2.1) を格子上に載せるには，微分を (対称) 差分に置き換えればよい．

$$S_{\mathrm{F}} = a^4 \sum_n \bar{\psi}_n \left[\sum_\mu \gamma_\mu \frac{U_{n,\mu}\psi_{n+\hat{\mu}} - U^\dagger_{n-\hat{\mu},\mu}\psi_{n-\hat{\mu}}}{2a} + m\psi_n \right] \tag{4.1}$$

ここで，フェルミオン場 ψ_n は，格子点 $x = na = (n_1, n_2, n_3, n_4)a$ の上で定義され，$\hat{\mu}$ は μ 方向の単位ベクトルを表す．また，$U_{n,\mu}$ はリンク変数 (link variable) と呼ばれ，2 つの格子点 na と $(n+\hat{\mu})a$ を結ぶリンク上に定義されたユニタリー行列 (unitary matrix) で，$U_{n+\hat{\mu},-\mu} = U^\dagger_{n,\mu}$ を満たし，連続理論のゲージ場とは

$$U_{n,\mu} = \exp[iagA_\mu(na)]$$

の関係にある (図 4.1 を参照)．

$U_{\mu,\nu}$ や $\psi_{n\pm\hat{\mu}}$ を a で展開すると，$a \to 0$ の極限で作用 (4.1) が作用 (2.1) に一致することは容易に示せる[1)]．また，この作用は $m = 0$ でカイラル変換 (2.2) に対して不変である．

作用 (4.1) は無次元量 $\psi' = a^{3/2}\psi$，$ma = M$ を使って以下のように書き直せる (ただし，新しい場につけた点 $'$ は省略した)．

$$S_{\mathrm{F}}(M) = \frac{1}{2}\sum_{n,\mu}[\bar{\psi}_n\gamma_\mu U_{n,\mu}\psi_{n+\hat{\mu}} - \bar{\psi}_{n+\hat{\mu}}\gamma_\mu U^\dagger_{n,\mu}\psi_n] + M\sum_n \bar{\psi}_n\psi_n$$

格子上の理論からどのように連続理論を再現するかを見るために，自由場 ($U_{n,\mu} = 1$) の場合を考え，作用を運動量空間で書き直す．

$$S_{\mathrm{F}}(M) = \int_{-\pi/a}^{\pi/a} \frac{\mathrm{d}^4 p}{(2\pi)^4} \bar{\psi}(-p) \left[i\sum_\mu \gamma_\mu \sin p_\mu a + M \right] \psi(p)$$

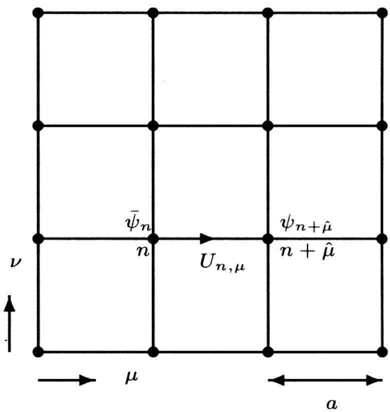


図 4.1　(2次元)格子の模式図．a は格子間隔である．ψ_n や $\bar{\psi}_n$ は格子点に，$U_{n,\mu}$ はリンク上に定義される．リンク上の矢印は μ の方向を表し，本文中にあるように $U_{n+\hat{\mu},-\mu} = U^{\dagger}_{n,\mu}$ である．

この理論が記述している粒子の分散関係(エネルギーと運動量の関係)は，フェルミオン場の伝搬関数(propagator)

$$G_{\mathrm{F}}(p) = \frac{1}{i\not{s} + M} = \frac{-i\not{s} + M}{s^2 + M^2}, \qquad \not{s} = \sum_{\mu} \gamma_\mu s_\mu(p), \quad s_\mu = \sin p_\mu a$$

の極(pole)を決める条件

$$s^2 + M^2 = \sum_{\mu} \sin^2 p_\mu a + M^2 = 0$$

で与えられる．この条件は連続極限(continuum limit)で $p^2 + M^2/a^2 = 0 + O(a^2)$ となり，確かに連続理論の分散関係(dispersion relation)に一致する*．ただし，粒子の質量が有限になるためには，$m = \lim_{a\to 0} M(a)/a$ が有限になるように M を a の関数として調整しなければならない．逆に $M(a) = ma \to 0$ となるように無次元の質量パラメータ M を調節すると格子上のフェルミオン場の極は質量 m の連続理論のフェルミ粒子を記述していることになる．これが，格子理論で連続極限をとるということであり，M の調節が「繰り込み」に相当する．

* ユークリッド空間ではこの分散関係を満たす解はないが，ミンコフスキー空間に解析接続すると $-p_0^2 + \vec{p}^2 + M^2/a^2 = 0$ となり，相対論的な分散関係になる．

自由場の場合はこの連続極限の取り方は当たり前に見えるが，相互作用があっても考え方は同じで，フェルミオン場の伝搬関数の極から決まる粒子の(次元をもった)質量が有限になるように無次元のパラメータを調節すればよい．実空間で考えると，伝搬関数は格子間隔で測った「距離」n だけ離れると $\mathrm{e}^{-n/\xi}$ のように指数関数的に小さくなる．ここで ξ は相関距離(correlation length)と呼ばれる量で，情報の伝わる(相関がある)距離の目安を与える．もし $\xi \to \infty$ になれば，格子間隔に比べて相関距離が十分大きくなるので，格子構造を無視することができる．実際，連続時空での伝搬関数は e^{-mx} $(x = na)$ と振る舞うべきだから，$m = n/(\xi x) = 1/(\xi a)$ となり，m を有限にするためには $\xi \sim 1/(ma) \to \infty$ とするようなパラメータ調節が必要で，それが「繰り込み」である．

このことを統計力学の言葉でいうと，「相関距離が格子間隔に比べて十分大きくなると格子構造がほとんど見えなくなる」ということであり，それが連続極限に対応している．ここでは，格子の構造を変えて $a \to 0$ としているのではなく，「系の力学的構造を調節して大きな相関距離での物理現象に着目することで，格子間隔を相対的に小さくしている」ということに注意してもらいたい．統計力学系で相関距離が発散するのは2次(以上)の相転移であるから，連続極限をとるとは，「系のパラメータを調節することで2次(以上)の相転移点に近づけながら物理量の間の関係を見ること」であり，この「パラメータの調整」が「繰り込み」に相当する．

4.2　ダブリング問題

このように，フェルミオン場を格子上に定義するには何の問題もないように見えるが，実は重大な問題が隠れている．それを見るために，もう一度分散関係の式

$$a^{-2}\left[\sum_{\mu}\sin^2(p_\mu a) + M^2\right]$$

を考えよう．$M = ma$ の場合に連続理論のものと一致する条件は $\sin p_\mu a = O(a)$ であるから，$p_\mu a = O(a)$ だけでなく $p_\mu a = \pi + O(a)$ も許される．$O(a)$ の部分を $\bar{p}_\mu$ と書くと，どちらの場合にも $\sum_\mu \bar{p}_\mu^2 + m^2$ となり，連続理論の分散関係を再現する．したがって，1つの次元ごとに2つ可能な解があり，その結果，

4次元では $2^4=16$ の違った極が現れる．

フェルミオン場の伝播関数の極が粒子を表すわけだから，格子フェルミオン場は16個の粒子を記述していることになるわけで，これを格子フェルミオンのダブリング(doubling)問題(各次元ごとにダブル)と呼ぶ．このため，単純な差分を使った格子フェルミオンは連続理論の(1つの)フェルミオンを正しく記述したことにはなっていない．

4.3　ウィルソン・フェルミオン

ウィルソン(Wilson)はダブリング問題を解決するために，ウィルソン項と呼ばれている次の項を格子フェルミオン作用に付け加えることを提案した[2]．

$$S_{\rm W}=-ar\bar{\psi}\nabla^2\psi\equiv-\frac{r}{2a}\bar{\psi}_n(U_{n,\mu}\psi_{n+\hat{\mu}}+U^\dagger_{n-\hat{\mu},\mu}\psi_{n-\hat{\mu}}-2\psi_n)$$

この項は次元5であり，$a\to 0$ の極限では消えていくものである．ここで，r はウィルソン・パラメータと呼ばれ，通常は $r=1$ ととる．この項を加えると自由場 $(U_{n,\mu}=1)$ の伝播関数は

$$G_{\rm F}(p)=\frac{-i\not{s}+M}{s^2+M(p)^2},\qquad M(p)=M+r\sum_\mu(1-\cos p_\mu a)$$

となり，あたかも運動量に依存した質量 $M(p)$ をもつように見える．このとき，われわれが必要とする物理的な粒子 $(\forall p_\mu\simeq 0)$ の質量は m のままであるが，ダブラー $(\exists p_\mu\simeq\pi/a)$ の質量は $m+2\#\pi r/a$ となり(ここで $\#\pi$ は π/a となる p_μ の数)，連続極限で発散する．そのため，(無限大の)大きな質量をもつダブラーは低エネルギーの物理現象には寄与できなくなる．このようにして格子フェルミオンのダブラーを取り除く方法をウィルソン・フェルミオン(Wilson fermion)の方法と呼ぶ．

ここでひとつ注意しておきたいことは，物理的粒子の質量が有限でダブラーの質量が発散するという違いは，人間が M を調節することで実現したのであって，理論がはじめから物理的粒子とダブラーを区別していたわけではないことである．実際，16個の粒子のそれぞれの質量は M/a が1つ，$(M+2r)/a$ が4つ，$(M+4r)/a$ が6つ，$(M+6r)/a$ が4つ，$(M+8r)/a$ が1つ，となるので，例えば $M\to 0$ とする代わりに $M\to -2r$ とすれば連続極限は4つのフェ

ルミオンを記述する理論になっている．また，ウィルソン・フェルミオン作用 $S_{\mathrm{F}}(M)+S_{\mathrm{W}}$ は

$$\psi_n \to (-1)^n \psi_n, \qquad (-1)^n \equiv \prod_{\mu=1}^{4} (-1)^{n_\mu}$$
$$\bar{\psi}_n \to (-1)^n \bar{\psi}_n$$

という変数変換に対して

$$S_{\mathrm{F}}(M) \to -S_{\mathrm{F}}(-(M+8r))$$

となる性質をもっている．フェルミオン作用の正負は物理的には違いがないので，このことは M の理論と $-(M+8r)$ の理論が等価であることを意味している．したがって，$M=0$ の連続極限と $M=-8r$ の連続極限は等価で 1 つのフェルミオンを記述しており，$M=-2r$ は $M=-6r$ と同じで 4 つのフェルミオン，$M=-4r$ は自分自身と等しく 6 つのフェルミオンをそれぞれ記述している．このように，ウィルソン・フェルミオン作用のパラメータ全体では常に（質量は違うにしても）16 個のフェルミオンが存在していることになる．

さて，ウィルソン・フェルミオンによって，ダブリング問題が完全に解決されたように思えるが，実は次のように新たな問題が発生してしまう．前にも述べたように，連続理論のフェルミオンは $m=0$ でカイラル対称性をもち，この性質は単純な格子化では保たれていた．ところが，ウィルソン・フェルミオンの場合，ウィルソン項が質量と同じ構造をしているため，$M=0$ でもカイラル対称性は壊れてしまっている．われわれは，格子上で場の理論を定義し，カイラル対称性の自発的破れなどの非摂動的性質を調べることを目標にしているので，格子化の段階でカイラル対称性が壊れてしまっていては不都合である．

そこで多くの人がダブリング問題のないカイラル対称な格子フェルミオンを構成しようと試みたがなかなか成功しなかった．この困難は「格子上のカイラルフェルミオンの問題」と呼ばれ，これが本文の主題である．

4.4　ニールセン-二宮の定理

実はかなり一般的な仮定をするだけて，「カイラル対称性をもつ格子フェルミ

オンにはダブリング問題が存在する」ということが証明できる．これをニールセン(Nielsen)-二宮の定理と呼ぶ[3]．彼らの証明は複雑なので，その代わりにカルステン(Karsten)による直観的な「証明」[4]を紹介する．

定理 1 (ニールセン-二宮)　格子フェルミオンの作用が以下の仮定を満たしているとする．

(a)　相互作用なし $(U_{n,\mu}=1)$
(b)　フェルミ場の双 2 次形式
(c)　平行移動不変性
(d)　エルミート性
(e)　局所性
(f)　カイラル対称性

このとき，フェルミオンのダブリング問題は必ず存在する．

証明 1　平行移動不変性からフェルミオンの作用は運動量空間で書け，相互作用がなくカイラル対称なフェルミ場の双 2 次形式だから，次の形に書けるはずである．

$$S=\int_{-\pi/a}^{\pi/a}\frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4}\bar{\psi}(-p)i\sum_{\mu}\gamma_{\mu}F_{\mu}(p)\psi(p)$$

エルミート性より $F_{\mu}(p)$ は実であり，局所性から連続であることがいえる．したがって，$F_{\mu}(p)$ は 4 次元トーラス T^4 上に定義された連続な実ベクトル場である．このとき，次の定理(ポアンカレ-ホップ)が成り立つ．

$$\text{index } F_{\mu}=\text{Euler number of } T^4=0$$

ここで，F_{μ} の指数(index)とは，$F_{\mu}(p_0)=0$ となる点(F_{μ} のゼロ点)の符号つきの和であり，以下のように定義される．

$$\text{index } F_{\mu}\equiv\sum_{p_0:F_{\mu}(p_0)=0}\det\ \frac{\partial F_{\mu}(p_0)}{p_{\nu}}$$

直観的には，ベクトル場 F_{μ} がゼロを横切るときの傾きのベクトルが右手系なら符号は正，左手系なら負と定義していることになっている．$F_{\mu}(p)$ のゼロ

点は伝搬関数の極に対応するが，符号は何を意味するだろうか？

$$\gamma_\mu F_\mu(p) \simeq \sum_{\mu=1}^{4} \gamma_\mu (p - p_0)_\mu$$

は符号が正の例であるが

$$\gamma_\mu F_\mu(p) \simeq -\gamma_1 (p - p_0)_1 + \sum_{\mu=2}^{4} \gamma_\mu (p - p_0)_\mu$$

は負の符号を与える．後者は

$$= \gamma_5 \gamma_1 \sum_{\mu=1}^{4} \gamma_\mu (p - p_0)_\mu \gamma_1 \gamma_5$$

と書き直せるから，前者が フェルミオン ψ を記述しているとすると後者は $\gamma_1\gamma_5\psi$ に対応している．カイラル変換で

$$\psi \to \mathrm{e}^{i\gamma_5 Q_5}\psi \tag{4.2}$$

$$\gamma_1\gamma_5\psi \to \mathrm{e}^{-i\gamma_5 Q_5}\gamma_1\gamma_5\psi \tag{4.3}$$

となるから，ゼロ点の符号はカイラル電荷 Q_5 の符号に対応している．したがって，ポアンカレ-ホップの定理をフェルミオンの言葉に翻訳すると「格子フェル

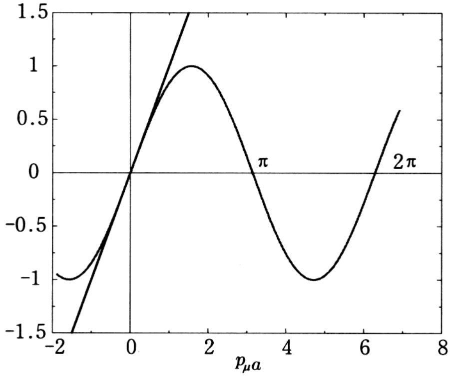


図 4.2　連続理論 $F_\mu(p) = p_\mu a$ と格子理論 $F_\mu(p) = \sin p_\mu a$．$p_\mu a$ が小さいときは両者は一致しているが，格子の場合，サイン関数の周期性と連続性から $p_\mu a = \pi$ でも $F_\mu(p) = 0$ となり，これがダブラーに対応している．サイン関数を他の関数に変えても，周期性と連続性からダブラーの存在は避けられない．

ミオンの伝搬関数がカイラル電荷が正の極をもてば必ずカイラル電荷が負の極(ダブラーに対応！)も存在する.」となり，ニールセン-二宮の定理が証明されたことになる.

この定理の意味をもう少し直観的に説明しよう．連続理論では $F_\mu(p) = p_\mu a$ であり，ゼロ点は $\forall p_\mu = 0$ にしかない．ところが，格子理論の場合，運動量は周期 $2\pi/a$ で周期的なので，ある μ に対して $F_\mu(0) = 0$ とすると，$F_\mu(0+2\pi/a) = 0$ となるはずでその傾きも等しい．したがって，p に関する連続性より，必ず途中のある点 p_0 で $F_\mu(p_0) = 0$ となる．実際，単純な格子化の場合 $F_\mu = \sin p_\mu a$ なので，$p_\mu = \pi/a$ でも $F_\mu = 0$ となり，これがダブラー(doubler)に対応している(図 4.2 を参照).

4.5　アノマリーとダブリング問題

カイラル対称な格子フェルミオンにダブラーが現れることを別の観点から見てみよう．ネーター(Noether)の定理によると，対称性に付随して保存する 4 次元カレント(current)が存在する．カイラル対称性の場合は軸性ベクトル・カレント(axial-vector curent) $A_\mu(x) = i\bar{\psi}\gamma_5\gamma_\mu\psi(x)$ が保存カレントで，保存則は $\partial^\mu A_\mu = 0$ である．ところが，量子補正を考えると

$$\partial^\mu A_\mu = \frac{g^2}{32\pi^2}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}F_{\mu\nu}F_{\alpha\beta} \tag{4.4}$$

とカレントの発散(divergence)がゼロにならず，保存則は成立していない．この式のゼロになっていない右辺をカイラル・アノマリー(anomaly)と呼ぶ．アノマリーの出現は，量子補正を計算するときの正則化がカイラル対称性を破ってしまうことに起因している．アノマリーの存在は物理的にも必要で $\pi^0 \to 2\gamma$ の崩壊や $U(1)$ 問題の解決に寄与している.

ここで，カイラル対称な格子フェルミオンを考えることにしよう．$a \neq 0$ で正則化されているので紫外発散はなく，カイラル対称性が保たれていることからアノマリーは存在しない．任意のゼロでない a でアノマリーがないので，$a \to 0$ でもアノマリーは現れることはない．つまり，カイラル対称な格子フェルミオンは(アノマリーをもつ)連続理論のフェルミオンの正しい格子化にはならないことがわかってしまったことを意味する.

実際，単純な格子化の場合の計算を詳しく調べると，ダブラー1つ1つの寄与はアノマリーを出すが，全部を足し上げるとそれらが相殺(cancel)してゼロになっていることがわかる．16個のダブラーのうちの半分のカイラル電荷 Q_5 が $+1$，残りが -1 でアノマリーはカイラル電荷の和に比例するのでゼロになるのである[5)]．ニールセン-二宮の定理の証明を思い出すと，$Q_5=1$ を与える極は $\#\pi=0$ のものが1つ，$\#\pi=2$ のものが6つ，$\#\pi=4$ のものが1つであり，$Q_5=-1$ は $\#\pi=1$ のものが4つ，$\#\pi=3$ のものが4つである．

この観点からニールセン-二宮の定理は，「カイラル対称な格子フェルミオンではアノマリーを相殺してゼロにするようなダブラーが必ず存在する」と言い換えられる．一方，カイラル対称性を破るウィルソン・フェルミオンでアノマリーを計算すると r がゼロでなければその大きさに依存せず，式(4.4)を再現することが示されている[5)]．

5章 ウィルソン・フェルミオンを用いたQCD

前章までで，カイラル対称性をもった格子フェルミオンを定義することはそう簡単ではないことがわかった．そのため，当面はダブラーは取り除けるがカイラル対称性を壊してしまう定式化であるウィルソン・フェルミオンを用いて格子 QCD を定義せざるをえない．この章ではウィルソン・フェルミオンを用いて格子 QCD の力学的性質，特に連続理論では南部-ゴールドストン粒子であるパイ中間子の質量がどうなるか，について詳しく見ていきたい．

5.1 ゼロ質量のパイ中間子の存在

ウィルソン・フェルミオンを用いた格子 QCD では，パイ中間子の質量について，次のことが予想される．

「パイ中間子はカイラル対称性の自発的破れに付随するゼロ質量の南部-ゴールドストン粒子であるから，そのカイラル対称性を壊してしまうウィルソン・フェルミオンを使うとクォーク質量がゼロの極限でもパイ中間子はゼロ質量にはならない．そして，ウィルソン項は $O(a)$ なので，パイ中間子の質量は連続極限 $(a \to 0)$ では何とかゼロになるだろう．」

実際にウィルソン・フェルミオンを使った格子 QCD でパイ中間子の質量を計算したところ，確かに予想通りクォーク質量をゼロにしてもパイ中間子の質量はゼロにならないのだが，奇妙なことに，クォーク質量を(負の)ある特定の値にするとパイ中間子の質量がゼロになることがわかった．そして，この特定のクォーク質量の値は格子間隔 a に依存することも示された．

通常はゼロ質量の粒子が存在するためには(カイラル対称性などの)何らかの理由が必要だが，この場合はその理由がよくわからない．初めのうちは「ウィルソン・フェルミオンによって壊されたカイラル対称性のパイ中間子に与える影

響が(負の)クォーク質量によってほぼ相殺され，パイ中間子がゼロ質量になった.」と理解されていたが，よく考えるとこれはおかしい．なぜなら，格子間隔がゼロでない格子上の場の理論は統計力学系になっているので，ゼロ質量の粒子(パイ中間子)が存在するためには「厳密な」理由が必要であり，「ウィルソン項とクォーク質量の相殺」といったあやふやな理由だけで説明されることはありえない．また，クォーク質量を一般的に M，パイ中間子がゼロになる点を M_c とすると，パイ中間子の質量 m_π^2 は

$$m_\pi^2 = A(M - M_c) + O((M - M_c)^2)$$

となることもわかってきたが，もし，$M < M_c$ ととると $m_\pi^2 < 0$ となり，パイ中間子がタキオンになってしまう．これをどう解釈するかも問題である．

著者が大学院で格子 QCD の研究を始めたときに直面した問題／疑問が上に述べたものであり，いろいろな試行錯誤の結果，「合理的」と思われる理由に到達した[6)]．以下ではそれを紹介したい．

まず，格子 QCD でパイ中間子の質量を計算する操作を考えよう．簡単のためにフレーバー数を 2 とする．このとき，フレーバー三重項であるパイ中間子を記述する演算子は

$$\pi^a(\vec{x}, t) = \bar{\psi}(\vec{x}, t)\gamma_5 \tau^a \psi(\vec{x}, t)$$

で与えられる．ここで，$\tau^a (a = 1, 2, 3)$ は 2×2 の(フレーバー)パウリ行列である．

クォーク質量 M が大きい場合にパイ中間子の相関関数を計算すると

$$\sum_{\vec{x}} \langle \pi^a(\vec{0}, 0)\pi^a(\vec{x}, t)\rangle \longrightarrow Z\mathrm{e}^{-m_\pi t}, \qquad t \to \infty \tag{5.1}$$

と t の指数関数的に減少するはずであり，この振る舞いから質量 m_π が決定できる．$M = M_c$ では $m_\pi = 0$ となるので，相関関数は

$$\sum_{\vec{x}} \langle \pi^a(\vec{0}, 0)\pi^a(\vec{x}, t)\rangle \longrightarrow Zt^{-\alpha}, \qquad t \to \infty \tag{5.2}$$

と t の冪乗の振る舞いを示す．ここで，$\alpha > 0$ は統計力学での臨界指数のひとつである．

さて，$M < M_c$ とすると，どうなるであろうか？ ここで思い浮かべてほしいのは，相転移の研究でよく知られたイジング・スピンの温度に対する振る舞いである．十分高温で2つのスピンの相関関数を計算すると，2つのスピンの距離に対して指数関数的に減衰するが，臨界温度ではその減衰はたかだか距離の冪乗にしかならない．このことはスピンの相関距離が無限大になっていることを意味している．ここで，温度を臨界温度以下にすると，この大きな相関距離が原因で長距離秩序(long-range order)が出現する．つまり，イジング模型の Z_2 対称性が自発的に破れてひとつのスピンの真空期待値が有限の値をもつのである．

この考えをパイ中間子に適用すると，$M < M_c$ では

$$\sum_{\vec{x}} \langle \pi^a(\vec{0},0)\pi^a(\vec{x},t)\rangle \longrightarrow V\langle \pi^a\rangle^2 + Z\mathrm{e}^{-m_\pi t}, \qquad t \to \infty \tag{5.3}$$

となるはずである．ここで $V = \sum_{\vec{x}}$ は空間体積である．このとき，$\langle \pi^a\rangle \neq 0$ であるが，理論のフレーバー対称性を使えば一般性を失うことなく

$$\langle \pi^3\rangle \neq 0, \quad \langle \pi^{1,2}\rangle = 0$$

としてよい．$\langle \pi^3\rangle = \langle \bar{\psi}\gamma_5\tau^3\psi\rangle \neq 0$ という真空期待値は，もともとのQCDの対称性であり，かつウィルソン・フェルミオンの格子QCDにおいても保たれているパリティ・フレーバー対称性を自発的に破っている*．つまり，「ウィルソン・フェルミオンを使った格子QCDに現れるゼロ質量のパイ中間子は，パリティ・フレーバー対称性の自発的破れに付随して現れるゼロ質量粒子である」ということができる．

連続極限のところで述べたように，2次以上の相転移の転移点直上では相関距離 ξ が発散するが，ここではまさしく $m_\pi = 1/\xi$ なので，パイ中間子がゼロ質量になるのである．この解釈によって，ゼロ質量のパイ中間子の出現が自然に説明される．さらに，この解釈から以下のようなことも導ける．

1. 2次(以上)の相転移では相関距離 ξ は $\xi \sim (M - M_c)^\nu$ で発散する．ここで ν は臨界指数のひとつである．したがって，$M \simeq M_c$ では

$$m_\pi^2 \simeq A(M - M_c)^{2\nu}$$

* ここでは，γ_5 の存在がパリティ不変性を破り，τ^3 の存在がフレーバー対称性を破っている．

と振る舞うはずである．パイ中間子の(有効)理論は 4 次元のボソンの理論であるから，(対数補正を除いて)平均場近似の結果 $\nu = 1/2$ が成り立つはずである．これは

$$m_\pi^2 \simeq A(M - M_c)$$

を意味するから，クォーク質量を $m_q = M - M_c$ と再定義すれば，QCD において期待される PCAC 関係式*が(カイラル対称性を使わずに)示せたことになる．

2. $M > M_c$ では $m_{\pi^0} = m_{\pi^\pm} > 0$**，また $M = M_c$ で $m_{\pi^0} = m_{\pi^\pm} = 0$ であるが，$M < M_c$ では，$m_{\pi^0} > 0$，$m_{\pi^\pm} = 0$ となる．$m_{\pi^\pm} = 0$ となるのは，荷電パイ中間子 $\pi^\pm$ が(パリティ・)フレーバー対称性の自発的破れの南部-ゴールドストン粒子であるためである．
3. 連続理論の QCD においては，パイ中間子などのフレーバー多重項(SU(N)部分)の質量が軽い一方でフレーバー一重項($U(1)$ 部分)の質量が重くなることを示さなければならなかった．これは $U(1)$ 問題と呼ばれている．フレーバー一重項に対応する演算子は $\bar{\psi}\gamma_5\psi$ であるが，パリティ・フレーバー対称性の自発的破れというシナリオでは，この粒子が軽くなる理由はまっ

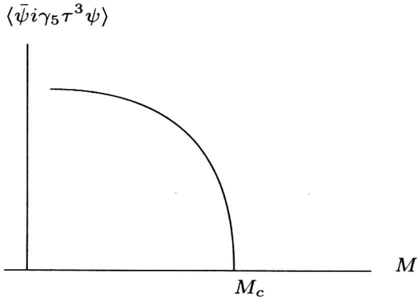


図 5.1　パリティ・フレーバー対称性の破れの秩序変数 $\langle\bar{\psi}i\gamma_5\tau^3\psi\rangle$ の M 依存性の模式図．$M = M_c$ が相転移点であり，$M < M_c$ では $\langle\bar{\psi}i\gamma_5\tau^3\psi\rangle \neq 0$ となり，パリティ・フレーバー対称性が自発的に破れる．

---

* 後で詳しく議論するが，連続理論の QCD ではカイラル対称性を使うと $m_\pi^2 = Am_q$ を示すことができる．この関係式を PCAC 関係式という．

** ここで π^0 は中性パイ中間子で τ^3 に対応し，$\pi^\pm$ は荷電パイ中間子で $\tau^\pm = (\tau^1 \pm i\tau^2)/\sqrt{2}$ に対応する．

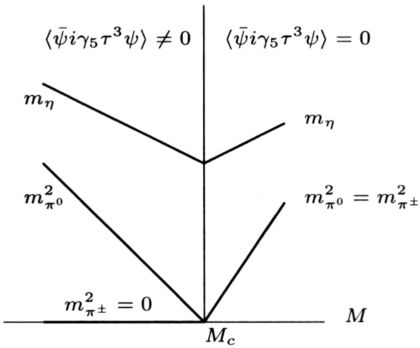


図 5.2　パイ中間子の質量の M 依存性の模式図．相転移点 $M = M_c$ でフレーバー多重項 (π^0, $\pi^\pm$) の質量はゼロになるが，一重項(η)は相転移と関係ないのでその質量はゼロとはならない．$M > M_c$ ではフレーバー対称性のために $m^2_{\pi^0} = m^2_{\pi^\pm}$ であるが，$M < M_c$ ではフレーバー対称性が破れるので $m^2_{\pi^0} \neq m^2_{\pi^\pm}$ である．$M < M_c$ で $m^2_{\pi^\pm} = 0$ となるのは $\pi^\pm$ がパリティ・フレーバー対称性の自発的破れに伴う南部-ゴールドストン粒子だからである．

たくない．実際，すべての M で $\langle\bar{\psi}\gamma_5\psi\rangle = 0$ となることが厳密に証明できるので，一重項の質量 m_η はゼロにならないことがわかる．したがって，このシナリオでは $U(1)$ 問題は自然に解決されるのである．

上の考察で予言される真空期待値 $\langle\bar{\psi}i\gamma_5\tau^3\psi\rangle$ や質量 m_{π^0}，$m_{\pi^\pm}$，m_η の M 依存性を，図 5.1 と 5.2 に模式的に描いておくので，参照してほしい．

この相転移が起こる理由の直観的な理解は次の通りである．QCD においてカイラル対称性が厳密に定義でき，それが自発的に破れたとすると，クォーク質量がゼロのときは無数の縮退した基底状態が存在し，真空は一意的には決まらないはずでる．通常はわずかな正のクォーク質量 m を導入し，それをゼロにする極限を考えるのであるが，その極限では $\langle\bar{\psi}\psi\rangle > 0$ となり，パリティやフレーバー対称性を破る真空期待値はゼロになっている．つまり，パリティやフレーバー対称性を保つ真空を手で選ぶわけである．

ところが，ウィルソン・フェルミオンの格子 QCD の場合は，カイラル対称性を壊すウィルソン項によって縮退は解かれるので，真空は一意的に決まるはずである．このとき $M = 0$ としても $\langle\bar{\psi}\psi\rangle > 0$ となるだけで，パイ中間子はゼロ質量にならないが，M をさらに負の値に減らしていくと $M = M_c$ でパイ中

間子はゼロ質量になる．$M < M_c$ ではパイ中間子はタキオンになるが，これは真空が不安定でポテンシャルのパイ中間子の方向 $(\bar{\psi}\gamma_5\tau^3\psi)$ の 2 次曲率が負であることを示しており，正しい真空が $\langle\bar{\psi}\gamma_5\tau^3\psi\rangle \neq 0$ にあることを意味している．これがパリティ・フレーバー対称性の自発的破れの直観的な理解である．

パリティ・フレーバー対称性の自発的破れの存在は，強結合展開やグロス-ヌボー模型などでの解析計算[7)]，格子 QCD の数値計算[8)]，非線型シグマ模型を使った一般論[9)]などで確認されている．

5.2　相 構 造

ウィルソン・フェルミオンの格子 QCD では 2 次相転移が存在することがわかったが，その相転移が結合定数 g^2 とクォーク質量 M の 2 つのパラメータ空間のどこで起こるかを決定することは，その力学的性質を理解する上で大事である．解析計算，模型計算，数値計算の結果わかってきた相構造を図 5.3 に与える．ただし，図が左右対称になるように，§ 4.3 で述べたウィルソン・フェルミオンのもつ $M \to -(M+8r)$ という対称性を使って，M の代わりに $\tilde{M} = M + 4r$

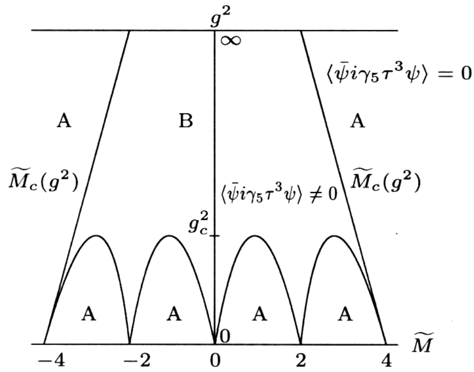


図 5.3　$r = 1$ のウィルソン・フェルミオンを用いた格子 QCD の $\widetilde{M}$–g^2 平面における相構造の模式図．ただし，$\widetilde{M} = M + 4$ であり，相構造は左右対称 ($\widetilde{M} \to -\widetilde{M}$ で不変) になる．物理的なフェルミオンの連続極限 ($g^2 \to 0$) は $\widetilde{M} \simeq 4$ である．相転移線 $\widetilde{M}_c(g^2)$ は強結合側 ($g^2 > g_c^2$) では 2 本，弱結合側 ($g^2 > g_c^2$) では 10 本あり，その上でパイ中間子の質量はゼロになる．領域 A では $\langle\bar{\psi}i\gamma_5\tau^3\psi\rangle = 0$ であるが，$\widetilde{M}_c(g^2)$ で囲まれた領域 B では $\langle\bar{\psi}i\gamma_5\tau^3\psi\rangle \neq 0$ となりパリティ・フレーバー対称性が自発的に破れ，そこでは $m_{\pi^\pm}^2 = 0$ である．

を横軸に用いている．また，簡単のため $r=1$ としている．この相構造の特徴は以下の通りである．

- 強結合極限 $(g^2=\infty)$ では中性パイ中間子がゼロ質量になる臨界クォーク質量 $\tilde{M}_c$ は $\tilde{M}_c=2,\ -2$ であることが解析的計算でわかっている．$\tilde{M}_c=2$ が連続理論の $m\to 0^+$ に $\tilde{M}_c=-2$ が連続理論の $m\to 0^-$ に対応している．そして領域 $-2<\tilde{M}<2$ はパリティ・フレーバー対称性が自発的に破れた相であり，$\langle\bar{\psi}i\gamma_5\tau^3\psi\rangle\neq 0$ となる．
- 弱結合極限 $(g^2=0)$ ではゼロ質量のクォークが現れる $\tilde{M}$ で中性パイ中間子がゼロ質量になる．タブラーも含めると $\tilde{M}_c=4,2,0,-2,-4$ の 5 個所である．そしてそれぞれの $\tilde{M}_c$ の近傍 $(g^2<<1)$ では 2 本の相転移線 $\tilde{M}_c(g^2)$ が存在し，その間がパリティ・フレーバー対称性が自発的に破れた相である．2 本ある線はやはり $m\to 0^\pm$ に対応している．この相構造は，$\tilde{M}$ を調整することにより連続極限(格子 QCD の場合は $g^2\to 0$)で 2 フレーバーの「物理的な」理論だけでなく，例えば $\tilde{M}\simeq 2$ では 8 $(=2\times 4)$ フレーバーのダブラーの理論が構成できることを意味している．
- 結合定数の中間領域 $(g^2\simeq g_c^2\simeq 1)$ では強結合から弱結合になるに従って相転移線 $M_c(g^2)$ の数が 2 本から 10 本に変化する．したがって，この領域を境に，強結合側では物理的粒子とダブラーの区別は明確になっていないと考えられる．逆に言えば，これより弱結合側では格子間隔 a が小さくなるので，ダブラー質量に対するウィルソン項の寄与 r/a が大きくなり，物理的粒子とダブラーの分離が起こり，それが相構造の変化に現れたと考えられる．

この相構造は後の章でも重要になってくるので覚えておいていただきたい．

5.3　相転移の秩序変数とゼロ固有値

QCD においてはカイラル対称性の自発的破れを表す秩序変数 $\langle\bar{\psi}\psi\rangle$ とディラック演算子のゼロ固有値との間には関係があった．ここではパリティ・フレーバー対称性の自発的破れを表す秩序変数 $\langle\bar{\psi}i\gamma_5\tau^3\psi\rangle$ とウィルソン・フェルミオン演算子のゼロ固有値との関係を考察する．

そのために，秩序変数に対する「外場」H を加えたウィルソン・フェルミオ

ン作用

$$S = \bar{\psi}\left(D_{\mathrm{W}}(M) + i\gamma_5\tau^3 H\right)\psi \tag{5.4}$$

を考察する．ここで $D_{\mathrm{W}}(M)$ は（質量パラメータ M をもつ）ウィルソン・フェルミオン演算子であり，添字や和の記号は省略した．$D_{\mathrm{W}}(M)$ は $D^{\dagger}_{\mathrm{W}}(M) = \gamma_5 D_{\mathrm{W}}(M)\gamma_5$ を満たすので，$H_{\mathrm{W}}(M) = \gamma_5 D_{\mathrm{W}}(M)$ はエルミート演算子となる．$H_{\mathrm{W}}(M)$ のことをエルミート・ウィルソン-ディラック演算子と呼ぶ．

この作用を使うと秩序変数は次のように計算される．（簡単のために，パラメータ M に対する依存性は省略して書いていないことに注意．）

$$\begin{aligned}
\lim_{H\to 0}\langle\bar{\psi}i\gamma_5\tau^3\psi\rangle &= -\lim_{H\to 0}\mathrm{Tr}\; i\gamma_5\tau^3\frac{1}{D_{\mathrm{W}} + i\gamma_5\tau^3 H}\\
&= -\lim_{H\to 0}\mathrm{tr}\; i\gamma_5\left[\frac{1}{D_{\mathrm{W}} + i\gamma_5 H} - \frac{1}{D_{\mathrm{W}} - i\gamma_5 H}\right]\\
&= -\lim_{H\to 0} i\mathrm{tr}\;\left[\frac{1}{H_{\mathrm{W}} + iH} - \frac{1}{H_{\mathrm{W}} - iH}\right]\\
&= -\lim_{H\to 0} i\sum_{\lambda}\langle\lambda|\left[\frac{1}{\lambda + iH} - \frac{1}{\lambda - iH}\right]|\lambda\rangle\\
&= -\lim_{H\to 0} i\int \mathrm{d}\lambda\rho(\lambda)\left[\frac{1}{\lambda + iH} - \frac{1}{\lambda - iH}\right]\\
&= -2\pi\rho(0)
\end{aligned} \tag{5.5}$$

ここで Tr はすべての自由度に関するトレースを，tr はフレーバー以外の自由度のトレースを表す．また，λ は H_{W} の固有値で $|\lambda\rangle$ はその固有関数，ρ はその状態密度で

$$\sum_{\lambda} \equiv \int \mathrm{d}\lambda\rho(\lambda)$$

と定義される．なお，最後の結果を得るのに，デルタ関数の定義

$$2\pi\delta(x) = i\lim_{\epsilon\to 0}\left[\frac{1}{x + i\epsilon} - \frac{1}{x - i\epsilon}\right]$$

を用いた．

上の結果は，秩序変数 $\langle\bar{\psi}i\gamma_5\tau^3\psi\rangle$ の値がエルミート化されたウィルソン・フェルミオンの演算子のゼロ固有値密度で与えられることを示している．やはり，この性質も後に重要になってくる．

6章 ドメインウォール・フェルミオン

前章までで述べたきたように，格子上でカイラル対称を保つことは簡単でない．これは，アノマリーが関係しているのでいたしかたのないことではあるが，QCD の力学的性質を調べる上では望ましいことではない．例えば，N_f のクォークが強い相互作用をしている量子色力学(QCD)を考えるとすると，そのフレーバー(flavor)・カイラル対称性は(カイラル $U(1)$ がアノマリーで壊れていることを考慮すると) $U(N_f)\otimes SU(N_f)$ であり，この対称性がフレーバー $U(N_f)$ に自発的に破れることで N_f^2-1 個の南部-ゴールドストン粒子が現れるはずである．ところが，格子上ではカイラル $SU(N_f)$ は対称性でないので南部-ゴールドストン粒子はゼロ質量にはならず，パイ中間子の質量が小さいことを対称性からは説明できない*.

アノマリーだけを考えると $U(1)$ だけを破って $SU(N_f)$ を保つような格子フェルミオンができそうであるが，ひとつのフレーバーに注目するとそのカイラル変換が $U(1)$ なのか $SU(N_f)$ なのかを区別することはできないので，$SU(N_f)$ だけを保つような格子フェルミオンは，あったとしてもきわめて特殊なものになってしまう可能性が高い．

ニールセン-二宮の定理がある以上，定理の仮定を壊さない限り，ダブリング問題は回避できない．ニールセン-二宮の定理を逃れて，格子上のカイラルフェルミオンを定式化しようとする多くの試みが今までなされてきたが，いずれも成功しなかった．ところが最近，新しい提案によってこの問題がほぼ解決されようとしている．これ以降の章では，最近の進展を中心に，格子カイラルフェルミオンの定式化の問題がどのように解決されようとしているのかを報告したい．

---

*ウィルソン・フェルミオンの場合は，これに代わる説明としてパリティ・フレーバー対称性の破れがあることは前章で見た通りである．

6.1　ドメインウォール・フェルミオンとは？

格子フェルミオンの問題にたいする突破口はカプラン(Kaplan)によって提唱されたドメインウォール・フェルミオンの方法である[10)]．彼のアイデアは 4 次元のカイラルフェルミオンを構成するのに，5 次元の非常に重いフェルミオンから出発するという奇抜なものであった．彼のアイデアを連続理論の場合で説明しよう．

5 次元のフェルミオンの自由場の作用を

$$S = \int \mathrm{d}^4x\mathrm{d}s\bar{\psi}(x,s)\left[\sum_{\mu=1}^{5}\gamma_\mu\partial_\mu + m(s)\right]\psi(x,s) \tag{6.1}$$

とする．ここで，x は 4 次元の座標，s は 5 次元目の座標であり，通常の 5 次元のフェルミオンとの違いは，その質量項が s 依存性をもち

$$m(s) = m_0\epsilon(s) = \begin{cases} m_0 & s>0 \\ 0 & s=0 \\ -m_0 & s<0 \end{cases}$$

で与えられることである．この作用がカイラルフェルミオンを記述していることを見るために，運動方程式

$$\left[\sum_{\mu=1}^{5}\gamma_\mu\partial_\mu + m(s)\right]\psi(x,s) = 0$$

の変数分離解 $\psi(x,s) = \phi(x)f(s)$ を考える．ただし，$f(s)$ はスカラー関数であり，フェルミオンのスピノール成分はすべて $\phi(x)$ に含まれるとする．

今，4 次元部分は平行移動不変だから，平面波展開 $\phi(x) = u(p)\mathrm{e}^{ipx}$ を考えると

$$\left[\sum_{\mu=1}^{4} i\gamma_\mu p_\mu\right]\ u(p)\ f(s) + \left[\gamma_5\partial_s f(s) + m(s)f(s)\right]\ u(p) = 0$$

ここで $u(p)$ がゼロ質量のディラック方程式

$$\left[\sum_{\mu=1}^{4} i\gamma_\mu p_\mu\right]\ u(p) = 0$$

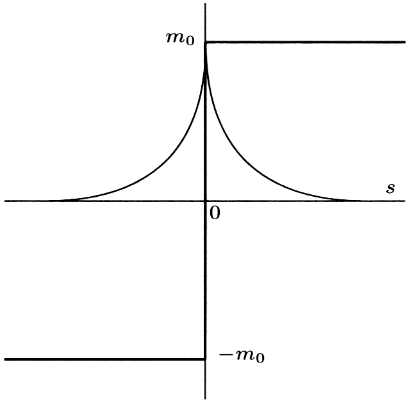


図 6.1 5 次元の質量項の関数形 $m_0\epsilon(s)$ と $s = 0$ 付近に局在する規格化可能な固有関数 $f(s) = C\exp[-m_0|s|]$ の模式図.

を満たす条件は

$$\gamma_5 u(p) = \pm u(p) \tag{6.2}$$

$$\pm\partial_s f(s) + m(s)f(s) = 0 \tag{6.3}$$

である. 2 番目の方程式の解は $f(s) = C\exp[\mp m_0|s|]$ (C は定数) で与えられるから, $m_0 > 0$ のときは $f(s) = C\exp[-m_0|s|]$ のみが規格化可能な解になる. このとき $\gamma_5 u(p) = u(p)$ だから, $u(p)$ は右巻きのゼロ質量のスピノール, つまりカイラルフェルミオンを記述している ($m_0 < 0$ なら, $u(p)$ は左巻きのカイラルフェルミオンである). s が大きくなると $f(s)$ は指数関数的に減少するので, m_0 が大きければ $f(s)$ はほとんど $s = 0$ に局在している (図 6.1 を参照). したがって, $\psi(x,s) = u(p)f(s)\mathrm{e}^{ipx}$ は $s = 0$ の 4 次元超平面に局在した右巻きのカイラルフェルミオンを記述している! このように, 5 次元のフェルミオンに 5 次元座標に関してひとつの領域でプラス, もう一方の領域でマイナスの質量を与えると, その境界である 4 次元のドメインにカイラルフェルミオンが現れる. これが, ドメインウォール・フェルミオンという名前の由来である.

カプランはこのアイデアを 5 次元格子のウィルソン・フェルミオンに適用し, $s = 0$ にカイラルフェルミオンが構成できることを示した. そして, そのフェルミオンをゲージ場と相互作用させれば, 右巻きのフェルミオンだけがゲージ

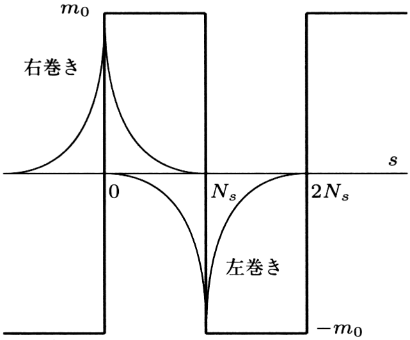


図 6.2　周期的境界条件(周期 $2N_s$)のときの質量項 $m_0\epsilon(s)$. $s=0$ 付近に右巻きモードが現れるとき，必然的に $s=N_s$ 付近に左巻きモードも現れる.

相互作用をするカイラルゲージ理論が格子上に定式化できる可能性を指摘した.

しかしながら，カプランのこの期待が実現されるのはそれほど簡単ではないことがわかってきた．格子上で理論を定義するとき，はじめは有限の大きさの時空間を考えるので，5 次元も有限の大きさとなる．このとき，何らかの境界条件が必要となる．普通は空間全体に関する(バルクな)物理量のみを考えるので，境界条件の違いは無限体積では問題にならない．しかし，今の場合は 5 次元理論の 4 次元の「境界」の性質が問題なので，5 次元方向の境界条件を無視するわけにはいかない．もし，周期的境界条件をとると，5 次元方向の大きさを $-N_s<s<N_s$ として $m(s+2N_s)=m(s)$ となるから，$m(s=0)$ だけでなく $m(s=N_s)$ にも境界ができ，その符号は $m(s=0)$ とは逆になっている（図 6.2).

前の議論を適用すると，$s=0$ に右巻きのカイラルフェルミオンが現れれば $s=N_s$ には左巻きのカイラルフェルミオンが必然的に現れてしまう．このような状況では右巻きモードだけにゲージ場を相互作用させるのは簡単ではない．実際，いろいろな方法が試みられたが今のところ成功していない．また，境界条件を変更しても，この問題を避けることはできない．例えば，周期境界条件の代わりにディリクレ型の境界条件を使っても，その境界に左巻きのカイラルフェルミオンが現れてしまう.

6.2 ドメインウォール・フェルミオンとカイラル対称性

このように，ドメインウォール・フェルミオンは格子上でのカイラルゲージ理論の構成という当初の目的を達成することはできなかった*．しかしながら，シャミア(Shamir)[11]，およびフルマン(Furuman)-シャミア[12]によって，ドメインウォール・フェルミオンの新たな応用が提唱された．それは，この方法を用いてQCDのようなベクターゲージ理論(ゲージ場が右巻きと左巻きのカイラルフェルミオンに同じように相互作用する理論)を格子上でカイラル対称性を保ったまま定式化することである．以下では，ドメインウォール・フェルミオンによる格子フェルミオンの構成について紹介していこう．

はじめに彼らが注目したことは，「カプランの定式化においてカイラルフェルミオンが存在するためには，$s>0$ の領域と $s<0$ の領域の両方が必要なわけではなく，どちらか一方があれば十分である」ということである．例えば，$1 \leqq s \leqq N_s$ を考えて，そこでの質量項 m は一定とする．このとき，両端に，周期的境界条件ではなく，ディリクレ型の境界条件を課すと $s=1$ 付近に右巻きのカイラルモード(2成分)が，$s=N_s$ 付近に左巻きのカイラルモード(2成分)が現れ，その2つを組み合わせることでカイラル対称性をもったゼロ質量のディラック・フェルミオン(4成分)が構成できる(図6.3)．

この考えに基づいて具体的に格子フェルミオンを構成する．5次元の質量を

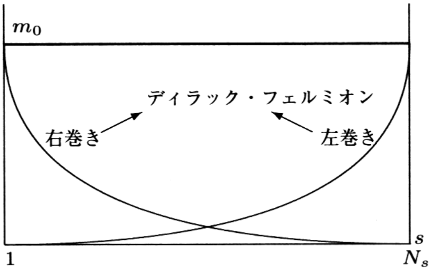


図 6.3 ディリクレ型境界条件のときの質量項 $m=m_0$．$s=1$ 付近の右巻きモードと $s=N_s$ 付近の左巻きモードが現れ，4成分のディラック・フェルミオンを構成する．

---

*最近，うまい工夫をすればドメインウォール・フェルミオンで格子カイラルゲージ理論が構成できる可能性が指摘されている．

もったウィルソン・フェルミオンを考え，それに 4 次元のゲージ場を相互作用させる．このとき，フェルミオン作用は以下のようになる．

$$
\begin{aligned}
S_{\mathrm{F}} = & \frac{1}{2}\sum_{n,s}\bar{\psi}_{n,s}\left[\sum_{\mu}\gamma_{\mu}(U_{n,\mu}\psi_{n+\hat{\mu},s} - U^{\dagger}_{n-\hat{\mu},\mu}\psi_{n-\hat{\mu},s}) + \gamma_5(\psi_{n,s+1} - \psi_{n,s-1})\right] \\
& + M_0\sum_{n,s}\bar{\psi}_{n,s}\psi_{n,s} \\
& + \frac{1}{2}\sum_{n,s}\bar{\psi}_{n,s}\left[\sum_{\mu}(U_{n,\mu}\psi_{n+\hat{\mu},s} + U^{\dagger}_{n-\hat{\mu},\mu}\psi_{n-\hat{\mu},s} - 2\psi_{n,s})\right. \\
& \left. + (\psi_{n,s+1} + \psi_{n,s-1} - 2\psi_{n,s})\right]
\end{aligned}
\tag{6.4}
$$

ここで，第 1 項は 5 次元ディラック・フェルミオンの共変差分の項であるが，5 次元方向のゲージ場がないので 5 次元方向はただの差分になっている．第 2 項は質量項，第 3 項は 5 次元のウィルソン項で，$r=-1$ ととった場合に対応している．ここで x は 4 次元座標で周期的境界条件を課し，$s=1,2,\cdots,N_s$ は 5 次元方向の座標でディリクレ型の境界条件

$$
\psi(x, s=0) = 0, \quad \psi(x, s=N_s+1) = 0
$$

を課す．

この理論は，5 次元の理論であるといっても，5 次元方向の力学変数はないので*，s を座標とは考えずに単なるフレーバー自由度と考えてもよい．このとき，作用は次のように書き換えられる．

$$
\begin{aligned}
S_{\mathrm{F}} = & \sum_{n,\mu}\frac{1}{2}\bar{\psi}_{n,s}\gamma_{\mu}(U_{n,\mu}\psi_{n+\hat{\mu},s} - U^{\dagger}_{n-\hat{\mu},\mu}\psi_{n-\hat{\mu},s}) \\
& + \sum_{n,m,s,t}\bar{\psi}_{n,s}[MP_{\mathrm{R}} + M^{\dagger}P_{\mathrm{L}}]^{nm}_{st}\psi_{m,t}
\end{aligned}
\tag{6.5}
$$

ここで，$P_{\mathrm{R}}=(1+\gamma_5)/2$，$P_{\mathrm{L}}=(1-\gamma_5)/2$ は right（右巻き），left（左巻き）へのカイラル射影演算子であり，4 成分のディラック・フェルミオンから右巻き成分，左巻き成分を取り出す働きがある．ここでは 5 次元目のガンマ行列 γ_5 が

* フェルミオンの成分の数は 4 次元でも 5 次元でも 4 である．

4 次元のカイラル対称性を定義する γ_5 と同じであることをうまく使っている．また，M はフレーバー s を混ぜるような項を含んだ質量項であり，次式で与えられる．

$$(M)^{n,m}_{s,t}\psi_{m,t} = \overbrace{\frac{1}{2}(U_{n,\mu}\psi_{n+\hat{\mu},s} + U^\dagger_{n-\hat{\mu},\mu}\psi_{n-\hat{\mu},s} - 2\psi_{n,s})}^{(\nabla^2\psi)_{n,s}} + \psi_{n,s+1} - \psi_{n,s} + M_0\psi_{n,s} \tag{6.6}$$

$$(M^\dagger)^{n,m}_{s,t}\psi_{m,t} = (\nabla^2\psi)_{n,s} + \psi_{n,s-1} - \psi_{n,s} + M_0\psi_{n,s}. \tag{6.7}$$

6×6 の場合に具体的に書き下すと

$$M = \begin{pmatrix} \overbrace{\nabla^2 + M_0 - 1}^{-W(U)} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -W(U) & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -W(U) & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -W(U) & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -W(U) & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -W(U) \end{pmatrix} \tag{6.8}$$

$$M^\dagger = \begin{pmatrix} -W(U) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -W(U) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -W(U) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -W(U) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -W(U) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -W(U) \end{pmatrix} \tag{6.9}$$

となる．

6.3　自由場におけるゼロモードの存在

この作用が(4 次元の)ゼロ質量のフェルミオンを含んでいることを，自由場 $(g^2 = 0 \to U_{n,\mu} = 1)$ の場合に見てみよう．このとき，4 次元座標 x を運動量空間に変換すると，作用は次のように書ける．

$$S_{\mathrm{F}} = \sum_{s,t}\int \frac{\mathrm{d}^4 p}{(2\pi)^4}\bar{\psi}_s(-p)\left[i\hat{\not{p}} + \left(MP_{\mathrm{R}} + M^\dagger P_{\mathrm{L}}\right)\right]_{st}\psi_t(p) \tag{6.10}$$

ここで $\hat{\not{p}} = \sum_\mu \gamma_\mu \hat{p}_\mu$, $\hat{p}_\mu = \sin p_\mu a$ であり，M は式 (6.8) の中で $W(U=1) =$

$1-M_0+\sum_\mu(1-\cos p_\mu a)$ と置き換えたもので与えられる．上の式を見ると，「この理論は多くのフレーバーのもつ 4 次元の自由フェルミオンと等価であり，その質量は M や $M^\dagger$ を対角化することによって得られる」，ということがわかる．したがって，もし M や $M^\dagger$ がゼロ固有値をもてば，つまり

$$\sum_t M_{st}\ u_{\rm R}(t,p)=0, \qquad \sum_t M_{st}^\dagger\ u_{\rm L}(t,p)=0 \tag{6.11}$$

となるゼロモード解 $u_{\rm R}$，$u_{\rm L}$ が存在すれば

$$\psi_s(p)=\underbrace{P_{\rm R}u_{\rm R}(s,p)}_{\text{右巻きゼロモード}}+\overbrace{P_{\rm L}u_{\rm L}(s,p)}^{\text{左巻きゼロモード}} \tag{6.12}$$

ととると，ψ はゼロ質量の(4 成分の)ディラック・フェルミオンを表すことになる．

そこで，ゼロモード解を求めてみることにする．$\sum_t M_{st}\phi_t=0$ を具体的に書き下してみると

$$\sum_t M_{st}\phi_t=-W\phi_s+\phi_{s+1}=0$$

となり，この方程式の解は

$$\phi_s=W^{s-1}\phi_1$$

で与えられる．ここで，ディリクレ型の境界条件 $\phi_{N_s+1}=0$ より

$$\phi_{N_s+1}=W^{N_s}\phi_1=0\rightarrow\phi_1=0$$

が導かれるので，一般の N_s ではこのようなゼロモード解は存在しない．しかしながら，もし N_s が無限大でかつ $|W|<1$ であれば

$$\lim_{N_s\to\infty}W^{N_s}=0$$

となるので，ゼロでない解 ϕ_1 が存在する．ϕ_1 の大きさは規格化条件

$$1=\sum_{s=1}^{N_s}\phi_s^\dagger\phi_s=\phi_1^\dagger\phi_1\frac{1-W^{2N_s}}{1-W^2}\longrightarrow\phi_1^\dagger\phi_1\frac{1}{1-W^2}$$

より，ϕ_1 を正の実数にとれば，$\phi_1=\sqrt{1-W^2}\equiv c_0$ となる．結局，規格化されたゼロモード解は

$$\phi_s=c_0W^{s-1}$$

表 6.1　いろいろな運動量に対応する M の条件

(p_μ)	M_0 の条件	対応する極の数
$(0,0,0,0)$	$0 < M_0 < 2$	1
$(\pi/a,0,0,0)$ など	$2 < M_0 < 4$	4
$(\pi/a,\pi/a,0,0)$ など	$4 < M_0 < 6$	6
$(\pi/a,\pi/a,\pi/a,\pi/a)$ など	$6 < M_0 < 8$	4
$(\pi/a,\pi/a,\pi/a,\pi/a)$	$8 < M_0 < 10$	1

と求まる．

もう一方の方程式 $\sum_s M^\dagger_{st}\phi_s = 0$ を考えると

$$-W\phi_s + \phi_{s-1} = 0, \qquad \phi_0 = 0$$

を満たす解は，やはり $|W| < 1$ かつ $N_s = \infty$ の場合のみ存在し

$$\phi_s = c_0 W^{N_s - s}$$

で与えられる．この解は $M\phi = 0$ の解を $s \to N_s + 1 - s$ と変換することでも得られるが，これはこの変換によって，$M\phi = 0$ が $M^\dagger\phi = 0$ に変換されることを反映している．

ここで，ゼロモード解の存在に必要な条件 $|W(p)| < 1$ を詳しく調べてみよう．この条件を具体的に書き下してみると

$$0 < M_0 - \sum_\mu (1 - \cos p_\mu a) < 2$$

となる．ψ の伝搬関数が連続極限で極をもつためには前と同様に $\sin p_\mu a = O(a)$ が必要であり，このことから $p \simeq 0, \pi$ となるのは前と同様である．このとき，M_0 に対する条件を調べると表 6.1 の結果になる．

この表の見方を説明しよう．例えば，$p \simeq (0,0,0,0)$ のときに，$|W(p)| < 1$ となってゼロモード解が存在するには，$0 < M_0 < 2$ でなくてはならない．また，$p \simeq (\pi/a,0,0,0)$ の場合は $2 < M_0 < 4$ が必要となる．表に挙げられた条件はすべて異なるので，$p \simeq (0,0,0,0)$ のときにゼロモード解をもつなら，ダブラーに対応する他の運動量で解をもつことはない．したがって，$0 < M < 2$ と

選んでおけば，$p \simeq (0,0,0,0)$ である物理的なフェルミオンだけがゼロモード解をもち，その結果，ダブリング問題のない物理的なゼロ質量ディラック・フェルミオンが構成される．

このことは，ドメインウォール・フェルミオンの自由場はダブリング問題のないゼロ質量のフェルミオンを記述していることを示している．ただし，この段階では，焦点であるカイラル対称性がどうなっているのかはまだはっきりしていない．通常はカイラル対称性からゼロ質量のフェルミオンを導くのだが，ここでは逆にゼロ質量のフェルミオンが存在することから実効的に「カイラル対称性」が実現されている，と期待するのである．この問題は，後に詳しく議論する．

6.4　クォーク場とQCD

前節で得られたゼロモード解は

$$u_{\mathrm{R}}(p,s) = c_0(p)W(p)^{s-1}$$
$$u_{\mathrm{L}}(p,s) = c_0(p)W(p)^{N_s-s}$$

となるが，この式から明らかなように右巻き(right-handed)ゼロモードは $s=1$ 付近に，左巻き(left-handed)ゼロモードは $s=N_s$ 付近にそれぞれ局在している(図6.3も参照)．この2つのゼロモードを組み合わせればゼロ質量のディラック・フェルミオンが構成でき，それがQCDにおけるクォークになるはずである．しかし，上で求められたゼロモードは自由場の場合のみの解であり，また運動量に依存しているので，x 空間での形は複雑になってしまう．

そこで，相互作用がある場合でも使えるようなクォーク場として，もともとのドメインウォール・フェルミオン ψ の $s=1$ での右巻き成分と $s=N_s$ での左巻き成分をとることにする．具体的には

$$q_n = P_{\mathrm{R}}\psi_{n,1} + P_{\mathrm{R}}\psi_{n,N_s}$$
$$\bar{q}_n = \bar{\psi}_{n,1}P_{\mathrm{L}} + \bar{\psi}_{n,N_s}P_{\mathrm{R}} \qquad (6.13)$$

とクォーク場を与える．ゼロモード解は，右巻きが $s=1$ に左巻きが $s=N_s$ にほとんど局在しているので，クォーク場 q とゼロモード解との重なりは大きいことが期待できる．

ゼロモード解が記述するフェルミオンはゼロ質量であるが，次の形で与えられるクォーク場の質量項によって質量 m_f をもつことができる．

$$-m_f \bar{q}_n q_n = -m_f \left[\bar{\psi}_{n,1} P_{\mathrm{L}} \psi_{n,N_s} + \bar{\psi}_{n,N_s} P_{\mathrm{R}} \psi_{n,1}\right]$$

この項によって，ドメインウォール・フェルミオンの質量行列 M は（6×6 の場合）次の形に変更される．

$$M = \begin{pmatrix} -W & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -W & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -W & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -W & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -W & 1 \\ -m_f & 0 & 0 & 0 & 0 & -W \end{pmatrix}$$

おもしろいことに，質量項は $s = 1$ と $s = N_s$ を結び付ける境界条件になっており，$m_f = 0$ がディリクレ型境界条件，$m_f = 1$ は反周期的境界条件，$m_f = -1$ は周期的境界条件に相当している．

質量項に現れるこの m_f がクォーク場の実際の質量とどのような対応関係にあるかを見てみよう．

$$P_{\mathrm{R}} \psi_{n,1} = P_{\mathrm{R}} q_n, \qquad P_{\mathrm{L}} \psi_{n,N_s} = P_{\mathrm{L}} q_n$$
$$\bar{\psi}_{n,1} P_{\mathrm{L}} = \bar{q}_n P_{\mathrm{L}}, \qquad \bar{\psi}_{n,N_s} P_{\mathrm{R}} = \bar{q}_n P_{\mathrm{R}}$$

であるから，$\psi_{n,s}$ をゼロモード解のみで近似すると

$$\psi_{n,s} \simeq W^{s-1} P_{\mathrm{R}} q_n + W^{N_s - s} P_{\mathrm{L}} q_n$$
$$\bar{\psi}_{n,s} \simeq \bar{q}_n W^{s-1} P_{\mathrm{L}} + \bar{q}_n W^{N_s - s} P_{\mathrm{R}}$$

となる．運動量空間では

$$\psi_s(p) \simeq \left[W^{s-1} P_{\mathrm{R}} + W^{N_s - s} P_{\mathrm{L}}\right] q(p)$$
$$\bar{\psi}_s(-p) \simeq \bar{q}(-p) \left[W^{s-1} P_{\mathrm{L}} + W^{N_s - s} P_{\mathrm{R}}\right]$$

となるから，これを作用に代入すると

$$S = \sum_{s,t} \bar{\psi}_s(-p) \left[i\not{p} + M P_{\mathrm{R}} + M^{\dagger} P_{\mathrm{L}}\right]_{st} \psi_t(p)$$

$$= q(-p)i\not{p}\sum_s (W^{2s-2}P_{\rm R} + W^{2N_s-2s}P_{\rm R})q(p)$$

$$+ q(-p)\sum_{st}\left[W^{N_s-s}M_{st}W^{t-1}P_{\rm R} + W^{s-1}M^{\dagger}_{st}W^{N_s-t}P_{\rm L}\right]q(p) \qquad (6.14)$$

と書ける(ここで p に関する積分記号は省略していることに注意).

各項は次のように計算される.

$$\sum_{s=1}^{N_s} W^{2s-2} = \sum_{s=1}^{N_s} W^{2N_s-2s} = \frac{1-W^{2N_s}}{1-W^2} \to \frac{1}{1-W^2}$$

$$\sum_{s,t} W^{N_s-s}M_{s,t}W^{t-1} = \sum_s W^{N_s-s}[-W\cdot W^{s-1} + W^s(1-\delta_{s,N_s}) - m_f\delta_{s,N_s}]$$

$$= -m_f - W^{N_s}$$

$$\sum_{s,t} W^{s-1}M_{s,t}W^{N_s-t} = \sum_s W^{s-1}[-W\cdot W^{N_s-s} + W^{N_s-s+1}(1-\delta_{s,1}) - m_f\delta_{s,1}]$$

$$= -m_f - W^{N_s}$$

これらを用いると

$$S \simeq \bar{q}(-p)\left[\frac{1-W^{2N_s}}{1-W^2}i\not{p} - (m_f + W^{N_s})\right]q(p) \qquad (6.15)$$

となるので，クォーク場の質量は $W_0 = W(p=0) = 1 - M_0$ を用いて

$$m_{クォーク} = \frac{1-W_0^2}{1-W_0^{2N_s}}[m_f + W_0^{N_s}] \to (1-W_0^2)m_f, \qquad N_s \to \infty$$

と与えられる．$N_s \to \infty$ の極限をとる前の表式を見ると，m_f 以外にも，質量に対する寄与 W^{N_s} が存在することが見てとれる．これは「$N_s \neq \infty$ ではゼロ固有値解がない」という前の結果に対応している．

$s = 1$ にある右巻きゼロモードと $s = N_s$ にある左巻きゼロモードの重なりの度合いが質量になるということから，$W_0^{N_s}$ の項の存在を直観的に理解できる．なぜなら，W^{s-1} あるいは W^{N_s-s} で減衰していく 2 つの解は $s = N_s/2$ あたりで最大の重なり $(W^{N_s/2})^2 = W^{N_s}$ をもつからである．$N_f = \infty$ の極限ではこの余分な項は落ちて，$m_{クォーク} = (1-W_0^2)m_f$ となり，クォーク質量は m_f に比例することが見てとれる．この性質もやはり通常はカイラル対称性から保証されるので，なんらかの意味で「カイラル対称性」が存在していることを強く示唆している．

6.5 ウォード-高橋恒等式

これまでに，自由場の場合のドメインウォール・フェルミオンは，M に関する適当な条件を満たせば，ゼロ質量のディラック・フェルミオンを記述することがわかったが，これはあくまで相互作用のない自由場での性質であり，ゲージ場との相互作用を入れてもゼロ質量のディラック・フェルミオンが存在するかどうかはわからない.

実際，カイラル対称性を壊してしまうウィルソン・フェルミオンの場合でも相互作用がなければ $M = 0$ でゼロ質量のディラック・フェルミオンを記述できるが，相互作用を入れてしまうとその性質を保つことはできず，M の微調整が必要になる．これはゼロ質量を保証するカイラル対称性がないことから当然の結果である．そこで，ここでは，ドメインウォール・フェルミオンに相互作用を入れたらゼロ質量のディラック・フェルミオンがどうなるかを議論していきたいと思う.

その目的のためにウォード-高橋恒等式が必要になるので，それをはじめに議論する．連続理論においてQCDの作用がカイラル変換で不変であることから導かれる(軸性)ウォード-高橋恒等式(axial-vector Ward-Takahashi identity)は

$$\langle 0|(\partial_\mu A_\mu^a(x) + 2mP^a(x)\mathcal{O}(y)|0\rangle + \langle 0|\delta_x^a\mathcal{O}(y)|0\rangle = 0$$

となる．ここで $|0\rangle$ は真空状態，m はクォーク質量，$A_\mu^a(x) = \bar{\psi}(x)\gamma_5\gamma_\mu\tau^a\psi(x)$ は軸性ベクトル・カレントであり，$P^a(x) = \bar{\psi}(x)\gamma_5\tau^a\psi(x)$ は擬スカラー密度である．また，$\psi(x)$ は N_f 種類(QCDではフレーバーと呼ぶ)のディラック・フェルミオンを列ベクトルとして並べたもので，τ^a はその列ベクトルに作用する $N_f \times N_f$ の行列でフレーバー行列と呼ばれており，τ^0 は単位行列に比例し，残りの $\tau^a (a = 1, \cdots, N_f^2 - 1)$ は $\mathrm{tr}\ \tau^a = 0$ を満たす対称行列で $SU(N_f)$ 変換の生成子を構成する.

δ_x^a は無限小局所カイラル変換であり

$$\begin{aligned}\delta_x^a\psi(y) &= i\delta(x-y)\tau^a\gamma_5\psi(x)\\ \delta_x^a\bar{\psi}(y) &= i\delta(x-y)\bar{\psi}(x)\tau^a\gamma_5\end{aligned} \tag{6.16}$$

と定義され，$\mathcal{O}(y)$ はフェルミオンやゲージ場を含む任意の局所演算子である．この(軸性)ウォード-高橋恒等式を使って以下のようなQCDの力学的な性質を

導くことができる．まず，$\mathcal{O}(y)=P^a(y)$，$x\neq y$ とすると，上の式は

$$\langle \partial_\mu A^a_\mu(x) P^a(x)\rangle = -2m\langle P^a(x)P^a(y)\rangle$$

となる．ここで，P が生成する中間状態として一番軽い質量をもつパイ中間子の状態のみを考えると

$$\partial^2_\mu f_\pi |\langle 0|P^a|\pi\rangle|^2 \mathrm{e}^{ip(x-y)} = -2m\langle 0|P^a|\pi\rangle|^2 \mathrm{e}^{ip(x-y)}$$

となる．ここで $|\pi\rangle$ はパイ中間子の 1 粒子状態，$p=(E_\pi,\vec{p})$，$E_\pi=\sqrt{\vec{p}^2+m_\pi^2}$ はそのエネルギー，$\vec{p}$ はその 3 次元運動量，m_π はパイ中間子の質量である．また，f_π はパイ中間子の崩壊定数であり，$\langle 0\,|A_\mu|\pi\rangle \equiv f_\pi\langle 0|\partial_\mu\pi|\pi\rangle$ で定義される．

ここで，∂^2_μ を $\mathrm{e}^{-ip(x-y)}$ に作用させ，かつゼロ運動量状態 $(\vec{p}=0)$ を考えると

$$m_\pi^2 f_\pi = 2mz^{1/2} \tag{6.17}$$

となるので，$m\to 0$ の極限で $f_\pi\neq 0$ であれば(ただし $p=z^{1/2}\pi$ とする)

$$\lim_{m\to 0} m_\pi^2 = \lim_{m\to 0} 2mz^{1/2}/f_\pi = 0$$

となる．これはパイ中間子がカイラル対称性の自発的破れに伴うゼロ質量の南部-ゴールドストン粒子であることを表しているが，式 (6.17) は，カイラル対称性がクォーク質量 m によって壊されているとき，ゼロであったパイ中間子の質量がどう変化するかを予言するもので，PCAC (partially conserved axial-vector current) 関係式と呼ばれ，ウォード-高橋恒等式の重要な帰結のひとつである．

以上のことから，「クォーク質量がゼロの極限で作用がカイラル対称性をもっていること」と「ウォード-高橋恒等式が成り立つこと」がほとんど同等であることがわかる．ドメインウォール・フェルミオンの作用はクォーク場以外の(重い)モードも含んでいるので作用のカイラル対称性を調べることは難しい．そこで，その代わりにドメインウォール・クォークが満たすウォード-高橋恒等式を調べることにする[12)]．

まず，ドメインウォール・フェルミオンに対する次のような変換を考える．

$$\psi_{n,s} \to \psi'_{n,s} = \mathrm{e}^{i\theta^a_s\tau^a}\psi_{n,s}$$
$$\bar\psi_{n,s} \to \bar\psi'_{n,s} = \bar\psi_{n,s}\mathrm{e}^{-i\theta^a_s\tau^a}$$

ここで

$$\theta_s^a = \begin{cases} \theta^a & \text{for} \quad s = 1, 2, \cdots, N_s/2 \\ -\theta^a & \text{for} \quad s = N_s/2+1, \cdots, N_s-1, N_s \end{cases}$$

である．この変換は s が一定の 4 次元上ではベクトル変換であるが，$s = N_s/2$ と $s = N_s/2+1$ を境にベクトル変換の符号が逆になっている．したがって，右巻き成分が $s = 1$ に，左巻き成分が $s = N_s$ にあるドメインウォール・クォーク場 q に対してはちょうど通常のカイラル変換のように働く．実際

$$q_n \to q'_n = (\mathrm{e}^{i\theta^a\tau^a} P_\mathrm{R} + \mathrm{e}^{-i\theta^a\tau^a} P_\mathrm{L}) q_n = \mathrm{e}^{i\theta^a\tau^a\gamma_5} q_n$$
$$\bar{q}_n \to \bar{q}'_n = \bar{q}_n (\mathrm{e}^{i\theta^a\tau^a} P_\mathrm{R} + \mathrm{e}^{-i\theta^a\tau^a} P_\mathrm{L}) = \bar{q}_n \mathrm{e}^{i\theta^a\tau^a\gamma_5}$$

となり，カイラル変換になっていることがわかる．

さて，ドメインウォール作用に対してこの変換を施したときに導かれるウォード-高橋恒等式を書き下そう．計算の詳細は省略するが，結果は以下の通りである．

$$\langle \{\nabla_\mu^- A_\mu^a(n) + 2m_f P^a(n)\}\mathcal{O} + \delta_n^a \mathcal{O}\rangle = \langle 2j_5^a(n)\mathcal{O}\rangle \qquad (6.18)$$

ここで，$P(n)$ は擬スカラー密度であり

$$P^a(n) = \bar{q}_n \gamma_5 \tau^a q_n$$

とクォーク場のみで与えられるが，擬ベクトル電流 $A_\mu^a(n)$ は

$$A_\mu^a(n) = \frac{1}{2}\sum_{s=1}^{N_s} \epsilon(s-(N_s+1)/2)[\bar{\psi}_{n+\hat{\mu},s}(1-\gamma_\mu)U_{n,\mu}^\dagger \tau^a \psi_{n,s} - \bar{\psi}_{n,s}(1+\gamma_\mu)U_{n,\mu}\tau^a \psi_{n+\hat{\mu},s}] \qquad (6.19)$$

と，s に関する和を含んでおり，クォーク場 q_n，$\bar{q}_n$ のみで書くことはできない．これはすべての $\psi_{n,s}$ が変換されることから当然ではある．ここで符号関数は $\epsilon(s) = s/|s|$ で与えられ，∇_μ^- は後方差分であり，$\nabla_\mu^- f(n) = f(n) - f(n-\mu)$ と定義される．

この A_μ^a の複雑さを除けば，上式の左辺の形は通常の格子上の軸性ウォード-高橋恒等式と同じである．したがって，右辺の項はウォード-高橋恒等式の破れ

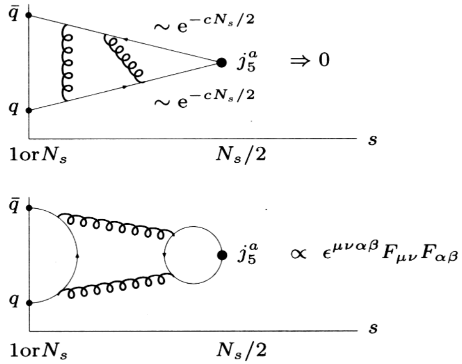


図 6.4　軸性ウォード-高橋恒等式の破れ $\langle j_5^a \mathcal{O}\rangle$ に寄与する典型的なファインマン図の例．上：すべてのフレーバーに共通で，この図の寄与は $N_s \to \infty$ でゼロになる．下：フレーバー一重項 $(a=0)$ だけに寄与するファインマン図の例．$N_s \to \infty$ でカイラル・アノマリーを与える．

を与えるもので，具体的には

$$j_5^a(n) = \frac{1}{2}[\bar{\psi}_{n,N_s/2+1}(1-\gamma_5)\tau^a\psi_{n,N_s} - \bar{\psi}_{n,N_s}(1+\gamma_5)\tau^a\psi_{n,N_s/2+1}]$$

となる．この項は異常項と呼ばれ，ちょうどベクトル変換の符号が変わる s 空間の真ん中にある場 $\psi_{n,N_s/2}$ や $\psi_{n,N_s/2+1}$ のみに依存している．

異常項のこの形から次の性質を満たすことがわかる．もし，任意の演算子 $\mathcal{O}$ がフェルミオンとしてはクォーク場 q，$\bar{q}$ しか含まないとすると（もちろんゲージ場は含んでもよい），$N_s \to \infty$ の極限で

$$\begin{aligned}\langle 2j_5^a(n)\ \mathcal{O}\rangle &= 0 \qquad \text{for } a \neq 0 \text{ (non-singlet)}\\ &\neq 0 \qquad \text{for } a = 0 \text{ (singlet)}\end{aligned}$$

となる．この性質は次のように理解できる．$a \neq 0$ の場合，$\mathrm{tr}\,\tau^a = 0$ であるので j_5^a のフェルミオンは自分自身でループを作ることはできない．したがって，j_5^a の中の $\psi_{n,N_s/2}$ や $\psi_{n,N_s/2+1}$ は $\mathcal{O}$ の中の $\bar{q}$ と伝搬関数でつなげなければならないし，$\bar{\psi}_{n,N_s/2}$ や $\bar{\psi}_{n,N_s/2+1}$ は q とつなげなければならない．q，$\bar{q}$ は $s=1,N_s$ の場しか含んでいないので 5 次元方向に $N_s/2$ ぐらい伝搬しなくてはいけない(図 6.4 を参照)．

前に見たように一番軽いゼロモードは 5 次元方向に指数関数的に減衰するので，$N_s \to \infty$ でその寄与はゼロになると考えられる．このことは自由場の場合やゲージ場の結合定数が小さい場合は容易に示すことができる．一方，$a = 0$ のときは $\mathrm{tr}\,\tau^a = \mathrm{tr}1 \neq 0$ なので上の議論は適用されない．やはり，ゲージ場の結合定数が小さい場合の計算では

$$\langle 2j_5^0(n)\ \mathcal{O}\rangle = \frac{g^2}{32\pi^2}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}F_{\mu\nu}F_{\alpha\beta}\mathcal{O}$$

となり，アノマリーを与える．

まとめると，ドメインウォール・フェルミオンの満たすウォード-高橋恒等式は $N_s \to \infty$ の極限で，フレーバー多重項 $(a \neq 1)$ の場合は通常のカイラル変換に対するウォード-高橋恒等式に一致し，フレーバー一重項の場合はアノマリーを含んだウォード-高橋恒等式になるので，QCD で期待される性質を再現している．ただし，擬ベクトル・カレント A_μ^a 以外はクォーク場のみしか含まないという制限が必要である．この結果は，相互作用のある場合でもドメインウォール・クォーク場は「カイラル対称性」をもっていることを強く示唆している．

6.6　重いモードの取り扱い：パウリ-ビラース法

ドメインウォール・フェルミオンは自由場の場合にひとつの軽いディラック・フェルミオンを含んでいることがわかった．また，相互作用を入れた場合でも，軽いモードの存在はウォード-高橋恒等式によって保証されているように見える．「軽いモード＝カイラルフェルミオン」の存在がなぜ保証されるかの本質的な理解は次章以降の考察に譲るが，ここではドメインウォール・フェルミオンに現れる重いモードの取り扱いについて簡単に触れる．

ドメインウォール・フェルミオンは 4 次元的に見ると N_s 個のフェルミオンの理論なのでひとつの軽いモード以外に $N_s - 1$ 個の（質量が格子カットオフ $1/a$ 程度の）重いフェルミオンが存在するはずである*．格子カットオフよりはるかに小さい低エネルギーでは重いモードの影響はほとんどないと思えるが，N_s が大きくなると量子効果であるフェルミオン・ループの寄与を通して影響を与え

*やはり格子カットオフ程度の質量をもつダブラーを含めると全部で $16N_s - 1$ 個になる．

る可能性がある．実際，このフェルミオンの分配関数を計算すると

$$Z = \det D_F \propto (\text{定数})^{N_s}$$

となるので，自由エネルギー $F \equiv \log Z = O(N_s)$ は $N_s \to \infty$ で発散してしまう．この発散を取り除き，有限の理論を定義するために，以下のようなパウリ-ビラース差引法(Pauli-Villars subtraction)を行う必要がある．

質量が m_f であるドメインウォール・フェルミオンの作用を

$$S_{\mathrm{F}}^{\mathrm{DWF}} = \bar{\psi} D_{\mathrm{F}}(m_f)\psi$$

と書いたとする．ここで ψ はフェルミオンである．ここで，ボソンであるパウリ-ビラース場 ϕ に対する作用を

$$S_{\mathrm{F}}^{\mathrm{PV}} = \bar{\phi} D_{\mathrm{F}}(m_f = 1)\phi$$

で与える．$m_f = 1$ なので反周期的境界条件になっていることに注意されたい．

この 2 つの作用の「和」で理論を定義したとすると，分配関数は

$$\begin{aligned} Z &= \int \mathcal{D}\psi\ \mathcal{D}\bar{\psi}\ \mathcal{D}\phi\ \mathcal{D}\bar{\phi}\ \exp\left[\bar{\psi} D_{\mathrm{F}}(m_f)\psi + \bar{\phi} D_{\mathrm{F}}(m_f = 1)\phi\right] \\ &= \frac{\det D_{\mathrm{F}}(m_f)}{\det D_{\mathrm{F}}(m_f = 1)} \end{aligned} \tag{6.20}$$

となる．この式を見れば，m_f によって影響を受ける軽いモード以外の寄与は分子と分母とで相殺しているのが見てとれる．また，分母に現れる $m_f = 1$ であるモードの質量はやはり格子カットオフ程度なので分子の軽いモードの寄与を打ち消すことはない．したがって，パウリ-ビラース場の導入によって $N_f = \infty$ の発散は取り除かれ，ほとんど軽いモードの寄与のみが取り出されたことになる．唯一残った分母の $m_f = 1$ のモードの影響については次章以降で検討することにする．

7章 ギンスパーク-ウィルソン関係式を満たす格子フェルミオン

ドメインウォール・フェルミオンは自由場の場合やウォード-高橋恒等式による解析からわかるように，カイラル対称性を保った格子フェルミオンの定式化として有望なものである．しかしながら，ドメインウォール・フェルミオンはカイラル対称性から予想される性質を満たしているというだけで，そのカイラル対称性は間接的なものである．そこで，ドメインウォール・フェルミオンの満たす“カイラル”対称性は何か，を直接的に考察していきたいが，ここでは少し話を一般的にして，格子フェルミオンに残された対称性はどのようなものか，という観点で考察を進めていくことにする．

7.1 ギンスパーク-ウィルソン関係式

ギンスパークとウィルソンはカイラル対称性をもつフェルミオン作用にカイラル不変でない繰り込み群(renormalization group)の変換を施し，得られたフェルミオン作用の満たすべき条件を考察した[13)]．繰り込み群の変換によって運動量の上限が小さくなっていくので，繰り込み群の変換と格子正則化とをほぼ同一視できるであろう，というのが彼らの考えで，(自由場の場合の)繰り込み変換を実際に遂行することで，次のようなギンスパーク-ウィルソン関係式(Ginsparg-Wilson relation; GW 関係式) を導いた．

$$D\gamma_5 + D\gamma_5 = 2aD\gamma_5 D \tag{7.1}$$

ここで D は(一般化された)ディラック演算子で，作用は $S = \bar{\psi}D\psi$ で与えられる．カイラル対称性がある場合は右辺はゼロになるので(D と γ_5 の反交換関係はゼロ)，この式はカイラル対称性の破れが $O(a)$ であることを示すと同時に，それが満たすべき条件を与えている．

この関係式は非線型であるため，局所性(locality)を満たす具体的な解はなかなか見つからなかった．ところが，最近，GW 関係式を満たす D が 2 つの違った方法で構成された．その紹介をする前に，GW 関係式を満たす D はどのような性質をもつかを考察しておこう．

7.2　GW 関係式と “カイラル” 対称性

GW 関係式を以下のように少し一般化しておく．

$$D\gamma_5 + D\gamma_5 = aDR\gamma_5 D \tag{7.2}$$

ここで R は γ_5 や D と可換で場所に関して局所的(local)な演算子であり，前の場合は $R_{n,m} = 2\delta_{n,m}$ であった．この式の両辺に左右から D^{-1} を掛けると

$$\gamma_5 D^{-1} + D^{-1}\gamma_5 = aR$$

となる．D^{-1} がフェルミオンの伝搬関数であることに注意すると，この式は「伝搬関数に対するカイラル対称性の破れは $O(a)$ (連続極限で消える)かつ局所的(低エネルギーでの寄与を出さない) である」ということを意味しており，カイラル対称性が “ほとんど” 成り立っているということができる．

この “ほとんど” カイラル対称性というのを正確に表したのが以下の(無限小)変換である．

$$\delta\psi = \gamma_5\left(1 - a\frac{R}{2}D\right)\psi, \qquad \delta\bar{\psi} = \bar{\psi}\left(1 - aD\frac{R}{2}\right)\gamma_5 \tag{7.3}$$

これは $O(a)$ を除いて確かにカイラル変換になっている．この変換を作用に施すと

$$\begin{aligned}\delta S = \delta\bar{\psi}D\psi + \bar{\psi}D\delta\psi &= \bar{\psi}\left(1 - a\frac{R}{2}D\right)\gamma_5 D\psi + \bar{\psi}D\gamma_5\left(1 - a\frac{R}{2}D\right)\psi \\ &= \bar{\psi}[\gamma_5 D + D\gamma_5 - aDR\gamma_5 D]\psi = 0\end{aligned} \tag{7.4}$$

となり，作用のもつ対称性であることがわかる[14)]．式の最後でゼロになることを示すのに GW 関係式を用いている．

ここで変換 (7.3) は一意的でないことに注意してほしい．作用 S は次のようなパラメータ Z を含んだ変換でも不変になることは容易に示せる．

$$\delta\psi = \gamma_5(1 - aRZD)\psi, \qquad \delta\bar{\psi} = \bar{\psi}(1 - aDR(1 - Z))\gamma_5 \tag{7.5}$$

ここで，$Z = 1/2$ としたのが，変換 (7.3) であり，$Z = 1$ なら ψ だけが変換して，$\bar{\psi}$ は変換しない．

この対称性から導かれるウォード-高橋の恒等式を使うと，パイ中間子が南部-ゴールドストン粒子のように振る舞うことが示せる[15)]．つまり，フェルミオン質量がゼロの極限で $\langle\bar{\psi}\psi\rangle \neq 0$ なら，パイ中間子など擬スカラー中間子 (pseudo-scalar meson) の質量はゼロになるのである．

このように GW 関係式を満たす格子フェルミオンは連続理論でのカイラル対称性とほぼ同じような性質をもつ対称性 (7.3) をもっていることがわかり，これが格子フェルミオン問題に対するひとつの解答になっている．

この対称性はカイラル対称性とは異なるので前章のニールセン-二宮の定理とは抵触しない．では，アノマリーはどうなっているのだろうか？ それを考えるために，変換 (7.3) をフェルミオンの数が N_f 個の場合に拡張する．

$$\delta^a \psi = T^a \gamma_5 \left(1 - a\frac{R}{2}D\right)\psi, \qquad \delta^a \bar{\psi} = \bar{\psi}\left(1 - aD\frac{R}{2}\right)\gamma_5 T^a \tag{7.6}$$

ここで $T^a(a = 0, 1, \cdots, N_f^2 - 1)$ は $U(N_f)$ の生成子で T^0 は単位行列に比例し，それ以外はトレースレス (traceless) のエルミート (Hermete) 行列である．$O(a)$ を無視すれば，この変換は (無限小) カイラル $U(N_f)$ 変換になっている．

この変換を使ってウォード-高橋の恒等式を導く，と前に述べたが，実は注意が必要である．変換に D を含んでいるため，フェルミオンの経路積分 (path integral) の測度 (measure) がこの変換で不変にならず，ヤコビアン (Jacobian) がでてしまう．それを実際に計算すると

$$2 \ \mathrm{tr} \ T^a \gamma_5 \left(1 - \frac{a}{2}RD\right)$$

となり，$SU(N_f)$ に対しては $\mathrm{tr}\, T^a = 0$ なのでこの項はゼロとなるが，$U(1)$ に対してはゼロにならず，後で示すように

$$2N_f \times \mathrm{index}(D)$$

となる[14)]．ここで $\mathrm{index}(D)$ とは演算子 D のゼロ固有値 (eigen-value) に属する右カイラル (right-handed) 状態と左カイラル (left-handed) 状態の数の差である．指数定理 (index theorem) や摂動展開などからこの量がアノマリーになる

ことが確かめられ，GW 関係式を満たす格子フェルミオンはアノマリーを正しく再現することがわかる．

7.3 GW 関係式を満たす D の構成

これまで見てきたように，GW 関係式を満たす D は格子フェルミオンのディラック演算子としては最適のものであるが，具体的に構成できなければ，たんなる絵に描いた餅である．具体的な構成方法は大きく分けると 2 つあるが，ここでは前章で考察してドメインウォール・フェルミオンから構成したものを紹介する．ただし，長さの都合上，どのように構成したかの紹介はここでは割愛させていただく．興味のある方は文献 16,17) を参照していただきたい．

具体的に構成された D は以下のように与えられる[16)]．

$$D = \frac{1}{2a}\left[1 - \frac{A}{\sqrt{A^\dagger A}}\right] \tag{7.7}$$

ここで $A = M + aD_{\mathrm{W}}$，D_{W} はゼロ質量のときのウィルソン・フェルミオン演算子 $(r = -1)$ で

$$\begin{aligned} D_{\mathrm{W}} &= \frac{1}{2}[\gamma_\mu(\nabla^*_\mu + \nabla_\mu) + a\nabla^*_\mu\nabla_\mu] \\ [\nabla_\mu\psi](n) &= \frac{1}{a}[U_{n,\mu}\psi(n+\hat{\mu}) - \psi(n)] \\ [\nabla^*_\mu\psi](n) &= \frac{1}{a}\left[\psi(n) - U^\dagger_{n-\hat{\mu},\mu}\psi(n-\hat{\mu})\right] \end{aligned}$$

と与えられる．$A^\dagger = \gamma_5 A \gamma_5$ という重要な性質はすぐに確かめられる．

$V = A/\sqrt{A^\dagger A}$ と置くと，$V^\dagger = V^{-1} = \gamma_5 V \gamma_5$ であることは容易に示せるから

$$\gamma_5 \frac{1}{2aD}\gamma_5 = \frac{1}{1-\gamma_5 V\gamma_5} = \frac{1}{1-V^\dagger} = \frac{V}{V-1} = 1 - \frac{1}{1-V} = 1 - \frac{1}{2aD}$$

したがって

$$\gamma_5 D^{-1} + D^{-1}\gamma_5 = 2a\gamma_5 \longrightarrow D\gamma_5 + \gamma_5 D = 2aD\gamma_5 D$$

となり，$R = 2$ の場合の GW 関係式が導かれた*．

* 一般に $D = \frac{1}{2a}(1-V)$，$\gamma_5 V\gamma_5 = V^\dagger = V^{-1}$ であれば D は ($R = 2$ の)GW 関係式を満たす．

D が GW 関係式を満たすことはわかったが，この演算子がフェルミオンとして意味があるかどうかを見るために，自由場の場合について考察する．このとき

$$A = M + i\sum_{\mu}\gamma_{\mu}\sin p_{\mu}a - \sum_{\mu}(1-\cos p_{\mu}a)$$

であるから，$A^{\dagger}A = s^2 + M(p)^2$，$M(p) = M - \sum_{\mu}(1-\cos p_{\mu}a)$ となる．$M = O(1)$ として，$a \ll 1$ を考えると

$$M(p) = \begin{cases} M + O(a^2) & \forall p_{\mu} \simeq 0 \\ M - 2n + O(a^2) & \exists p_{\mu} \simeq \pi/a, n = \#\text{ of }\pi\text{'s} \end{cases}$$

となるので，物理的な粒子 ($\forall p_{\mu} \simeq 0$) に対しては ($M > 0$)

$$D = \frac{1}{2a}\left[1 - \frac{ia\not{p} + M}{M}\right] = -i\not{p}\frac{1}{2M}$$

となり，ゼロ質量のフェルミオンを記述している．一方，ダブラーに対しては，$0 < M < 2$ ととれば

$$D = \frac{1}{2a}\left[1 - \frac{ia\not{p} + M - 2n}{2n - M}\right] = -i\not{p}\frac{1}{2(2n-M)} + \frac{1}{a}$$

となるので，$O(1/a)$ の重い質量をもつ極になり，低エネルギーの物理には寄与しない．したがって，式 (7.7) は GW 関係式を満たし，かつ低エネルギーでひとつのゼロ質量のフェルミオンを記述するディラック演算子を具体的に与えている．

式(7.7)の中の $(A^{\dagger}A)^{-1/2}$ はウィルソン演算子の逆を含むので非局所的(non-local)に見えるが，$M = O(1)$ であるため，自由場の場合に示したように局所的であることが期待される．相互作用がある場合の局所性は自明ではないが，ゲージ場が十分スムーズ($U_{n,\mu}$ から作られる場の強さがある上限値を越えない)であれば，次式の意味で局所的である[18)]．

$$|D_{n,m}| \le A\mathrm{e}^{-B|n-m|}, \qquad A > 0,\ B > 0$$

つまり，相互作用の強さは距離とともに指数関数的に減少していく．

7.4　GW 関係式と指数定理

最後に，GW 関係式を満たす D に対する指数定理を紹介する．簡単のために

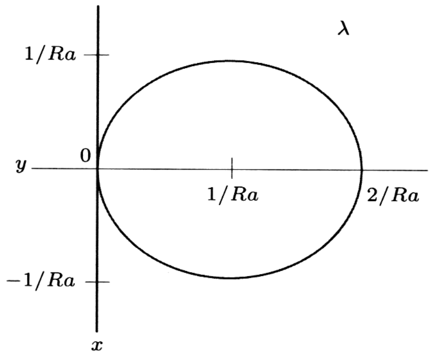


図 7.1　GW 関係式を満たすディラック演算子 D の固有値分布 $\lambda = x + iy$. 中心が $(1/Ra, 0)$ で半径 $1/Ra$ の円で与えられる. 連続理論のディラック演算子の固有値は純虚数なので虚軸で与えられる. 原点付近で両者が一致しており, $a \to 0$ では円の半径が大きくなるので一致する領域が増えていく.

$R_{n,m} = R\delta_{n,m}$ ととっておく. まず, D の(複素)固有値は半径 $1/(Ra)$ の円になることを示す.

$$Du = \lambda u, \qquad \lambda = x + iy$$

とすると, $u^\dagger D^\dagger = u^\dagger \bar{\lambda}$ なので, GW 関係式（および, $D^\dagger = \gamma_5 D \gamma_5$）

$$D + D^\dagger = aRD^\dagger D$$

を $u^\dagger$ と u で挟むと

$$\lambda + \bar{\lambda} = 2a\bar{\lambda}\lambda \to 2x = Ra(x^2 + y^2) \to \left(x - \frac{1}{Ra}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{R^2a^2}$$

となるので, 固有値は確かに中心 $(1/Ra, 0)$ で半径 $1/Ra$ の円になっている[15)] (図 7.1 を参照). 連続理論のディラック演算子の固有値は $\pm iy$ であるから, 原点付近の D の固有値は連続理論のものと $a \to 0$ の極限で一致する. 一方, 自由場のときのダブラーの質量は $2/Ra$ だったので, $(0, 2/Ra)$ 付近の固有値はダブラーのスペクトラム (spectrum) に対応している.

指数定理を見るために, エルミート化された $H = \gamma_5 D$ の固有値問題 $H\phi_n = \lambda_n \phi_n$ を考える. 証明は省略するが H の固有値と固有関数は以下のように分類される.

1. $\lambda_n = 0$. このとき固有関数はカイラル ($\gamma_5\phi_n = \pm\phi_n$) になる.
2. $0 < |\lambda_n| < 2/(Ra)$. このとき，固有値は必ず $\pm\lambda_n$ とペアで現れる．なぜなら，$\Gamma_5 = \gamma_5(1 - aRD/2)$ と定義すると，GW 関係式から $H\Gamma_5 + \Gamma_5 H = 0$ となるので
$$H\phi_n = \lambda_n\phi_n \to H\Gamma_5\phi_n = -\lambda_n\Gamma_5\phi_n$$
また，$\phi^\dagger\Gamma_5\phi = 0$ も成り立つ.
3. $\lambda_n = \pm 2/(Ra)$. このとき，$\Gamma_5\phi_n = 0$ となるので $\pm$ がペアになる必要はない．したがって，$\pm 2/(Ra)$ に対応して $\gamma_5\phi_n = \pm\phi_n$ (復号同順)である.

この結果を用いて，アノマリーの計算にでてきたトレースを評価すると
$$\mathrm{tr}\ \gamma_5\left(1 - \frac{a}{2}RD\right) = \sum_{\lambda_n=0}\phi_n^\dagger\Gamma_5\phi_n + \sum_{0<|\lambda_n|<2/aR}\overbrace{\phi_n^\dagger\Gamma_5\phi_n}^{\to 0}$$
$$+ \sum_{\lambda_n=\pm 2/aR}\overbrace{\phi_n^\dagger\Gamma_5\phi_n}^{\to 0} = \sum_{\lambda_n=0}\phi_n^\dagger\gamma_5\phi_n = n_+ - n_- = \mathrm{index}(D)$$
となる[19]．ここで，$n_\pm$ は $\gamma_5\phi_n = \pm\phi_n$ となるゼロ固有状態(eigen-state)の個数である.

格子フェルミオンでは $\mathrm{tr}\ \gamma_5 = 0$ は常に成り立つが，上の固有状態を使って計算すると
$$\mathrm{tr}\,\gamma_5 = n_+ - n_- + N_+ - N_- = 0$$
となる．ここで，$N_\pm$ は $\lambda_n = \pm 2/(Ra)$ となる固有状態の数である．以下に示すように，これはダブラーに対応するので，$\mathrm{tr}\,\gamma_5 = 0$ は物理的状態とダブラーとの間の相殺で実現されていることがわかる.

さて，$N_\pm$ がダブラーの数であることを見てみよう．簡単のために $R = 2$ の場合を考える．自由場の場合に示したように，格子間隔が十分小さければ
$$A = M_n - i\not{D}, \quad M_n = \frac{1}{a}(M_0 - 2nr) \quad (n = 0, 1, 2, 3, 4)$$
となる．これを式 (7.7) に代入し，$H\psi$ を評価する.
$$H\psi = \gamma_5 D\psi = \frac{\gamma_5}{2a}\left(1 - \frac{A}{\sqrt{A^\dagger A}}\right)\psi = \frac{\gamma_5}{2a}\left(1 - \frac{-i\not{D} + M_n}{\sqrt{\not{D}^2 + M_n^2}}\right)\psi$$

今 $0 < M_0 < 2$ であることに注意して，固有関数 ϕ を 4 次元のゼロモード ($D\!\!\!/\psi = 0$) とすれば

$$= \frac{\gamma_5}{2a}\left(1 - \frac{M_n}{|M_n|}\right)\psi = \begin{cases} 0 & n = 0 \\ \pm\dfrac{1}{a}\psi & n \neq 0 \end{cases}$$

となる．この式は，固有値が $\lambda_n = \pm 2/(Ra) = \pm 1/a$ となる固有関数はダブラーに対応することを示している．ここで，$D\!\!\!/\psi = 0$ なので，ψ は γ_5 の固有状態になり，その結果，$\gamma_5\psi = \pm\psi$ に現れる符号が，$\lambda_n = \pm 1/a$ の符号に対応している．

8章 ドメインウォール・フェルミオンと GW関係式

前章で述べたように，$N_s \to \infty$ の極限でドメインウォール・フェルミオンはGW 関係式を満たすオーバーラップ・ディラック演算子に移行するのであるが，両者の関係をここで詳しく考察することで，ドメインウォール・フェルミオンに現れる軽いモードの本質を明らかにし，作用のもつ対称性を決定したい[17,20]．

ドメインウォール・フェルミオンの作用を

$$S_{\rm DW} = \sum \bar{\psi} \left[\frac{1}{2}\gamma_\mu(\nabla_\mu + \nabla_\mu^\dagger) + MP_{\rm R} + M^\dagger P_{\rm L} \right] \psi \qquad (8.1)$$

と書くことにする．ここでは n，s などの添字は混乱のない限り省略している．また，∇_μ，$\nabla_\mu^\dagger$ は前章で定義したものである．さて，次のような変数変換を考えよう．

$$\psi' = (PP_{\rm R} + P_{\rm L})\psi, \qquad \bar{\psi}' = \bar{\psi}(PP_{\rm L} + P_{\rm R}) \qquad (8.2)$$

ここで，P は5次元方向の「パリティ変換」で

$$P\psi_{n,s} = \psi_{n,N_s+1-s}$$

と定義される．新しい変数で作用を書き直すと

$$S_{\rm DW} = \sum \bar{\psi}' \left[\frac{1}{2}\gamma_\mu(\nabla_\mu + \nabla_\mu^\dagger) + M^H(m_f) \right] \psi' \qquad (8.3)$$

となる．ここで

$$M^H(m_f) = MP = PM^\dagger$$

$$
= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & W \\ 0 & 0 & 0 & -1 & W & 0 \\ 0 & 0 & -1 & W & 0 & 0 \\ 0 & -1 & W & 0 & 0 & 0 \\ -1 & W & 0 & 0 & 0 & 0 \\ W & 0 & 0 & 0 & 0 & m_f \end{pmatrix} \tag{8.4}
$$

である(最後は 6×6 の場合の具体型)．この作用は質量項に γ_5 が入っていないベクトル型になっている．

新しい変数では，クォーク場は

$$
q_n = \psi'_{n,N_s}, \qquad \bar{q}_n = \bar{\psi}'_{n,N_s}
$$

とすべて $s = N_s$ の変数だけで定義されている．この変数に対するドメインウォール・フェルミオンのカイラル変換は

$$
\delta\psi'_s = (\Gamma_5)_{st}\psi'_t, \tag{8.5}
$$

$$
\Gamma_5 = \begin{pmatrix} -\gamma_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\gamma_5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\gamma_5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +\gamma_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & +\gamma_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & +\gamma_5 \end{pmatrix}
$$

と書け，クォーク場に対しては

$$
\delta q = \gamma_5 q, \qquad \delta\bar{q} = \bar{q}\gamma_5
$$

と，通常のカイラル変換とまったく同じ変換になる．この変換に対するウォード-高橋恒等式は次のように書ける．

$$
\{\Gamma_5 D'_{\mathrm{DW}} + D'_{\mathrm{DW}}\Gamma_5\} = 2\gamma_5\delta_{s,N_s/2}\delta_{t,N_s/2} \tag{8.6}
$$

ここで

$$
D'_{\mathrm{DW}} = \frac{1}{2}\gamma_\mu(\nabla_\mu + \nabla_\mu^\dagger) + M^H(0)
$$

である．

ドメインウォール・フェルミオンとそれに対するパウリ-ビラース場との違いは $m_f = 0$ か $m_f = 1$ だけなので，$s = N_s$ だけに現れる．したがって，$s = 1, 2, \cdots, N_s - 1$ までを積分した結果の有効作用を考えると

$$S_{\mathrm{DW}} = \bar{q}\, aD_{\mathrm{eff}}(N_s) q \tag{8.7}$$

$$S_{\mathrm{PV}} = \bar{Q}[aD_{\mathrm{eff}}(N_s) + 1] Q \tag{8.8}$$

と書けるはずである．ここで，$Q_n = \phi'_{n,N_s}$，$\bar{Q}_n = \bar{\phi}'_{n,N_s}$ は，クォークに対応するパウリ-ビラース場である．このことから，パウリ-ビラース場を含めた理論の分配関数は

$$Z_{\mathrm{total}} = Z_{\mathrm{DW}} \cdot Z_{\mathrm{PV}} = \frac{\det aD_{\mathrm{eff}}(N_s)}{\det[aD_{\mathrm{eff}}(N_s) + 1]} \tag{8.9}$$

$$\equiv \det aD_{N_s} = \int \mathcal{D}\Phi\ \mathcal{D}\bar{\Phi} \exp[\bar{\Phi} a D_{N_s} \Phi] \tag{8.10}$$

最後の式は分配関数を「ひとつの」4 次元のフェルミオン場の積分で書いたもので，D_{N_s} はそのフェルミオン場に対するディラック演算子である．上の関係式から

$$aD_{N_s} = \frac{aD_{\mathrm{eff}}(N_s)}{aD_{\mathrm{eff}}(N_s) + 1} \tag{8.11}$$

$$D_{N_s}^{-1} = a + D_{\mathrm{eff}}^{-1}(N_s) \tag{8.12}$$

が得られる．

前に述べたように，(パウリ-ビラース場を含めた) ドメインウォール・フェルミオンの $N_s \to \infty$ の極限は GW 関係式を満たす演算子を与えるから

$$\lim_{N_s \to \infty} \left\{ D_{N_s}^{-1} \gamma_5 + \gamma_5 D_{N_s}^{-1} \right\} = 2a\gamma_5 \tag{8.13}$$

となるはずである．このことから，ドメインウォール・クォーク場 q に対する有効フェルミオン演算子 $D_{\mathrm{eff}}(N_s)$ は

$$\lim_{N_s \to \infty} \left\{ D_{\mathrm{eff}}^{-1}(N_s) \gamma_5 + \gamma_5 D_{\mathrm{eff}}^{-1}(N_s) \right\} = 0 \tag{8.14}$$

を満たすことがわかり，$D_{\mathrm{eff}} \equiv \lim_{N_s \to \infty} D_{\mathrm{eff}}(N_s)$ がカイラル対称性をもつことがいえる．つまり，(有効) 作用

$$S = \bar{q} a D_{\mathrm{eff}} q$$

表 8.1　ドメインウォール・フェルミオンと GW フェルミオンの関係

	DW フェルミオン	GW フェルミオン
クォーク場	q	$(1 - aD_{\mathrm{GW}}/2)\Phi$
反クォーク場	$\bar{q}$	$\bar{\Phi}$
変換	カイラル	カイラル $+O(a)$
	$\delta q = \gamma_5 q$	$\delta\Phi = \gamma_5(1 - aD_{\mathrm{GW}})\Phi$
	$\delta\bar{q} = \bar{q}\gamma_5$	$\delta\bar{\Phi} = \bar{\Phi}\gamma_5$
質量項	$m\bar{q}q$	$m\bar{\Phi}(1 - aD_{\mathrm{GW}}/2)\Phi$

で定義される理論はダブリング問題がなく，かつカイラル対称性をもった格子フェルミオンを定義していることになる．

このことが，ニールセン-二宮の定理とは矛盾していないことを確かめよう．演算子 D_{eff} は

$$D_{\mathrm{eff}} = \frac{aD_{\mathrm{GW}}}{1 - aD_{\mathrm{GW}}}, \qquad D_{\mathrm{GW}} \equiv \lim_{N_s \to \infty} D_{N_s}$$

で与えられるので，D_{GW} が局所的であることから，D_{eff} は非局所的な演算子になり，ニールセン-二宮の定理の仮定を満たしていない．この非局所性は，重い $N_s - 1$ 個モードの積分が原因なので，それを打ち消し局所的な理論にするために導入されたのが，パウリ-ビラース場である．その有効作用は

$$S = \bar{Q}[aD_{\mathrm{eff}} + 1]Q$$

であるので，ゼロでない質量をもちカイラル対称性を破っている．このため，両方の寄与から得られた演算子 D_{GW} は，局所的であるがカイラル対称性はもっていない．その代わりに D_{GW} は GW 関係式を満たすことが重要なことであり，ここに q のもつカイラル対称性が Φ の GW 対称性として実現されたのである．

最後にドメインウォール・フェルミオンと GW 関係式を満たすフェルミオンとの対応を表 8.1 にまとめておく．ただし，GW フェルミオンの対称性は $Z = 1$ の場合のものを用いている．

9章 格子フェルミオン問題の将来

9.1 残された問題点

今まで見てきたように，長年の懸案であった“カイラル”対称性をもった格子上のフェルミオンの定式化は，ドメインウォール・フェルミオン(DWF)の $N_s \to \infty$ 極限で導かれたフェルミオン作用が GW 関係式を満たすということで肯定的に解決された．厳密なカイラル対称性ではなく，GW 関係式から $O(a)$ を含んだ対称性が存在し，そこからウォード-高橋恒等式やアノマリーなど期待する性質が導けるのである．厳密なカイラル対称性ではないので，この解決法はニールセン-二宮の定理には抵触しない．

しかしながら，すべての問題が解決したわけではない．$N_s \to \infty$ で DWF が GW 関係式を満たす作用になるといったが，無条件でそうなるわけではない．例えば，DWF のウォード-高橋恒等式に現れる異常項の寄与が $N_s \to \infty$ で消えていくための条件を考えてみよう．以下で示すように，異常項の寄与が消えるためには，対応する 4 次元の(エルミート化された)ウィルソン・フェルミオン演算子がゼロ固有値をもたないことが必要である．

直観的には，異常項の寄与は

$$\sim \exp(-N_s H_{\rm W}) \tag{9.1}$$

と振る舞うはずである．ここに $H_{\rm W} = \gamma_5 D_{\rm W}(M)$ である．したがって，もし $H_{\rm W}$ がゼロ固有値をもたなければ，異常項は $N_s \to \infty$ でゼロになるが，もしゼロ固有値をもつとするとその寄与はゼロにならず有限に残ってしまう．$H_{\rm W}$ がゼロ固有値をもつかどうかは力学的な問題で，パラメータ M やゲージ場の性質に依存している．

一方，DWF から構成された GW 関係式を満たす演算子の場合は，対称性は常に成り立つのだが，作用の局所性が問題となってくる．前にも述べたように，ゲージ場が十分スムーズであれば* GW 演算子は局所的になる．このときの証明を詳しく見てみると，実は $H_{\rm W} = \gamma_5 D_{\rm W}(M)$ の最小固有値がゼロでないことが本質的で，その性質さえあれば局所性は証明できる．実際，ゲージ場がスムーズであるという条件は $H_{\rm W}$ の最小固有値がゼロでないことを証明するのに使われる．

どちらの場合でも $H_{\rm W}(M)$ がゼロ固有値をもつかどうかが問題となっている．たぶん，両者の関係は独立ではなく，DWF の異常項が残るときは GWF の局所性も破れ，局所性が破れるときは DWF の異常項が残ってしまうと思われる．

以下では，問題になる $H_{\rm W}(M)$ のゼロ固有値について考察する．ウィルソン・フェルミオンの章で示したように $H_{\rm W}(M)$ のゼロ固有値密度はパリティ・フレーバー対称性の自発的破れの秩序変数に比例する．したがって，パリティ・フレーバー対称性が破れた相で $H_{\rm W}(M)$ は有限の確率でゼロ固有値をもつ．逆に対称性が破れていない相では $H_{\rm W}$ がゼロ固有値をもつことはない．そのことを念頭にもう一度ウィルソン・フェルミオンの相構造を見てみよう．

図 9.1 に，ドメインウォール・フェルミオンの場合である $r = -1$ のウィルソン・フェルミオンの相構造の $M = 0$ 付近の拡大図を載せておくので参照してほしい．まず，自由場，つまり弱結合の極限 $(g^2 = 0)$ を考える．このとき，ゼロモードがない条件は，例えば $0 < M < 2$ であり，これは DWF での物理的なカイラルフェルミオンの存在条件と一致している**．GW 関係式を満たす演算子の場合も同様な対応関係がある．

さて，ゲージ相互作用を導入するとどうなるであろうか？ 相構造からわかるように，ゲージ結合定数 g^2 をすこし大きくしていくと許される M の領域，つまりパリティ・フレーバー対称性の破れていない相は，g^2 に依存して少しずつずれていく．複数の相転移線を図 9.1 にあるように $M_c^{(i)}(g^2)$ として，左から $i = 1, 2, 3, 4$ と名前をつけると，自由場のときに物理的フェルミオンに対応し

---

* より正確には，その場の強さ $F_{\mu\nu}$ が十分小さければ．

** 他の領域はダブラーのカイラルフェルミオンに対応しているのだが，少し複雑なのでここでは考えない．また，$M < 0$ にもゼロモードはないが，このときは対応する DWF のカイラルフェルミオンは存在しない．

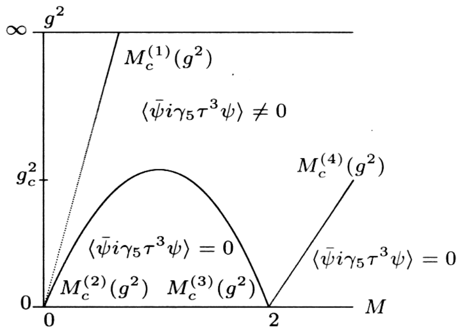


図 9.1　$r = -1$ のウィルソン・フェルミオンを用いた格子 QCD 相構造の $M = 0$ 付近の拡大図．相転移線 $M_c^{(i)}(g^2)$ は左から $i = 1, 2, 3, 4, \cdots$ と番号をつけてある．$M_c^{(i)}(g^2)$ で囲まれた領域では $\langle\bar{\psi}i\gamma_5\tau^3\psi\rangle \neq 0$ となるが，それ以外の領域では $\langle\bar{\psi}i\gamma_5\tau^3\psi\rangle = 0$ なので，$H_{\rm W}$ にゼロ固有値はない．したがって，相互作用があるときでも，$g^2 < g_c^2$ である弱結合で $M_c^{(2)}(g^2) < M < M_c^{(3)}(g^2)$ ととれば $H_{\rm W}$ のゼロ固有値がないので，DWF はカイラルフェルミオンを記述している．

ていた領域 $0 < M < 2$ は相互作用を入れると $M_c^{(2)}(g^2) < M < M_c^{(3)}(g^2)$ とずれてくる．自由場の場合は，領域の真ん中である $M = 1$ が有限の N_s の影響がもっとも小さくなる最適な M の値であった．相互作用を入れるとその最適値も $M > 1$ となると予想されるが，実際，この変化は数値計算によって確認されている．

ところで，g^2 を g_c^2 より大きくしたらどうなるだろうか？ 相構造をみると，このとき，(自由場のときの $0 < M < 2$ につながる) パリティ・フレーバー対称性の破れていない相はなくなっている．このことから，$g^2 > g_c^2$ ではドメインウォール・フェルミオンは格子フェルミオンの定式化としてうまく働かないはずである．実際の数値計算でもこの性質が確認されている[21)]．以上の考察は GW 関係式を満たすフェルミオンの場合にも適用されると考えられる．

ウィルソン・フェルミオンの相構造から結論できたことをまとめると以下のようになる．ドメインウォール・フェルミオン (あるいは GW 関係式を満たすフェルミオン) はゲージ結合定数 g^2 が十分小さければ*，M をうまく調節することで格子フェルミオンの定式化になる．しかしながら，g^2 がある値より大き

* 格子間隔 a が細かいことに対応している．あるいは，ゲージ場がスムーズになっているといってもよい．

い(格子間隔が粗い)ときは格子フェルミオンの定式化としては機能しない.

上に述べた予想を解析的，数値的にあるいは定性的，定量的に確認することが今後の課題である．そして，このやり方の限界を踏まえた上で実際の計算にドメインウォール・フェルミオン(あるいはGW関係式を満たすフェルミオン)を応用していくことも将来の重要な課題である.

9.2　終わりに

長年の懸案であった“カイラル”対称性をもった格子上のフェルミオンの定式化はDWFやGW関係式とその対称性を用いることで肯定的に解決された．このことは，単に格子フェルミオンの問題の解決を与えただけではなく，場の量子論におけるカイラル対称性の定式化に対するわれわれの理解を深めるものになっている．実際，連続理論ではよく見えなかった対称性・固有値・アノマリーなどの関係が明確になり，正則化の真の意味が明らかになってきた.

格子ゲージ理論の分野でDWFやGW関係式を中心とした話題は現在も発展中であり，格子QCDの数値計算への応用や格子上のカイラルゲージ理論(chiral gauge theory)の構成などの研究が活発に行われている．しかしながら，ここで述べたように多くの問題が未解決であり，これからの研究の進展が望まれている.

格子上の場の理論の研究は，数値計算によりいろいろな物理量を非摂動的(non-perturbative)に計算する格子QCDが中心で，その研究成果も多いが，今回取り上げたような場の理論の本質的な問題も多く残されており，その理論的な研究も重要である．この文章を読んだ読者のうちの何人かがこの方面の研究に進み未解決の理論的な問題に挑戦して貰うことを心から願っている.

参考文献

1) K. G. Wilson : *Phys. Rev.*, **D10**, 2445 (1974)
2) K. G. Wilson : Quark and String on a lattice, New Penomena in Subnuclear Physics (Plenum Press, New York, 1977)
3) H. B. Nielsen & M. Ninomiya : *Nucl. Phys.*, **B185**, 20 (1981)
4) L. H. Karsten : *Phys. Lett.*, **B104**, 315 (1981)
5) L. H. Karsten & J. Smit : *Nucl. Phys.*, **B183**, 103 (1981)
6) S. Aoki : *Phys. Rev. Lett.*, **57**, 3136 (1986); *Nucl. Phys.*, **B314**, 79 (1989)
7) S. Aoki : *Phys. Rev.*, **D30**, 2653 (1984); **D33**, 2399 (1986); **D34**, 3170 (1986); S. Aoki, S. Boettcher & A. Gocksch : *Phys. Lett.*, **B331**, 157(1994)
8) S. Aoki & A. Gocksch ; *Phys. Lett.*, **B231**, 449 (1989); *Phys. Rev.*, **D45**, 3845 (1992); S. Aoki, A. Ukawa & T. Umemura : *Phys. Rev. Lett.*, **76**, 873 (1996); S. Aoki : *Prog. Theor. Phys.*(Suppl) **122**, 179 (1996)
9) S. Sharpe & R. Singleton; *Phys. Rev.*, **D58**, 074501 (1998)
10) D. B. Kaplan : *Phys. Lett.*, **B288**, 342 (1992)
11) Y. Shamir : *Nucl. Phys.*, **B406**, 90 (1993)
12) V. Furman & Y. Shamir : *Nucl. Phys.*, **B439**, 54 (1995)
13) P. H. Ginsparg & K. G. Wilson, : *Phys. Rev.*, **D25**, 2649 (1982)
14) M. Lüscher : *Phys. Lett.*, **B428**, 342 (1998)
15) P. Hasenfratz, V. Laliena & F. Niedermayer : *Phys. Lett.*, **B427**, 125 (1998)
16) H. Neuberger : *Phys. Lett.*, **B427**, 353 (1998)
17) Y. Kikukawa & T. Noguchi : Low energy effective action of domain-wall fermion & the Ginsparg-Wilson relation, hep-lat/9902022
18) P. Hernandez, K. Jansen & M. Lüscher ; *Nucl. Phys.*, **B552**, 363 (1999)
19) K. Fujikawa, : *Phys. Rev.*, **D60**, 074505 (1999)
20) Y. Kikukawa : *Nucl. Phys.*, **B584**, 511 (2000)
21) CP-PACS Collaboration, A. Ali Khan, *et. al.* : *Phys. Rev.*, **D63**, 114503 (2001)

超弦理論と時空

夏梅　誠

1章 はじめに

1.1 本稿で目指すこと

一般相対論は実験的にはたいへん成功しているものの，理論的には様々な問題を抱えており，理論としては十分ではない．特に，ほかの基礎的な相互作用とは違い，一般相対論は現在までに量子化に成功していない．

現在のところ，超弦理論以外に知られている量子重力理論はない．しかも，超弦理論はすべての力を統一する統一理論の最有力候補でもある．このため，一般相対論では十分に答えられなかった問題に対して，超弦理論がどういう答えを出すのかたいへん興味深い．本解説では，重力理論としての超弦理論に焦点を当てて，これまでに得られた成果を俯瞰してみたい．

この解説では，ある結果を詳しく導出することはしない．第一に，後で見るように現在の超弦理論は十分に定式化できていない．このため，将来超弦理論が定式化されたときに，現時点でのある結果の導出に何か教育的価値があるかどうかは疑わしい．第二に，超弦理論の分野では流行が頻繁に(1 年程度のスパンで)移り変わっている．したがって，現時点，あるいは過去の一時期に流行であったテーマも，読者がこの解説を読まれる時点で中心的なテーマであることはまずない．

しかし，超弦理論における重力一般は，常に超弦理論の中心的なテーマであり続けた．そこで，ここでは超弦理論における重力について，何がわかっていて何がわかっていないか，そして一般相対論の抱える諸問題のうち超弦理論の様々な段階で何が解けるか，何が解ける可能性がないのかについて考えてみたい．

このようなアプローチは，いったん超弦理論が定式化されて様々な問題が解けた暁には，不要になってしまう．また考えもつかなかった可能性や暗黙の仮

表 1.1　各章のレベル

一般相対論の基礎知識	超弦理論の基礎知識	アドバンスト・トピック
2 章	3, 6 章	4, 5, 7 章

定，見過ごされていた論理の欠陥が常にありうるし，無限の可能性がある．したがって，問題を解く上で消去法もあまり良い方法とはいえない．良い例は，現在「M 理論」として知られる「超弦理論」の定式化の候補である仮想的な理論である．この理論は近似的には 11 次元超重力理論で表されることが知られているが，95 年以前はこの理論が統一理論になりうる可能性は全くないと思われてきた．この理論は思いもつかなかった可能性によって一躍復活した．このようなことから，物理の研究ではシャーロック・ホームズの有名な格言「ありえないものを一つ一つ消していって残ったものが，たとえどんなにありそうでなくても，真実でなければならない」はあまり役に立たないことが多い*．

本解説では，各トピックについて詳しい導出はしないので，理解できない部分も多いかもしれない．しかし，専門家でない読者やこれから超弦理論を学んでいこうとする読者に，超弦理論の現状の雰囲気をつかんでいただければ十分であると思う．

本解説の執筆に当たっては，Gungwon Kang 氏，岡村隆氏との議論がたいへん参考になり両氏に謝辞を表したい．また岡村氏，細谷暁夫氏，前田健吾氏をはじめとする多くの方々に初稿を通読いただき有益なコメントをいただいた．以上の方々にも感謝する．

1.2　アウトライン

本稿では一般相対論や場の理論について初歩的な知識を仮定しているが，超弦理論についての知識は仮定しない．2 章では一般相対論でのブラックホールについて簡単に触れ，3, 6 章では超弦理論の基礎をまとめる．ただ本解説は超弦理論の解説自体が目的ではないので，超弦理論の解説は多くの場合表層的なものにとどめる．

この解説では，主にブラックホールにまつわる 2 つの未解決問題を扱うこと

* コナン・ドイル（小池滋監訳）：四つの署名（シャーロック・ホームズ全集 5），ちくま文庫版（1997）

にする．4 章ではそのうちのひとつ，一般相対論の特異点問題を超弦理論がどう解くかについて，様々な特異点の例を用いて議論する．また 5 章でも特異点問題に関連した問題を扱う．7 章ではもうひとつの未解決問題，ブラックホールの量子論的問題を議論する．ここでは特に，近年の重要な発展であるブラックホール熱力学の超弦理論的な導出や(§7.4)，これに関連した最大の未解決問題であるインフォメーション・パラドックスについて解説する(§7.2)．最後に §7.5 でブラックホールそのものの量子化や，量子重力理論の構築にむけての議論も簡単におこなう．これらの問題を通して，超弦理論にとって時空とは何かを考えてみたい．

1.3　規約について

メトリックの符号(signature)は $(-,+,\ldots,+)$ とする[52)]．また素粒子論でよく用いられる

$$\hbar = c = 1 \tag{1.1}$$

の単位系を使う．この単位系で，d 次元のニュートン定数 G_d は $(長さ)^{d-2}$ の次元をもつので，$G_d \sim l_d^{d-2}$ と書くことができる．l_d はプランク長さと呼ばれる．

量子重力の議論ではプランク単位系，$G_d = \hbar = c = 1$ がよく用いられる．つまりプランク長さも 1 とおく単位系である．しかし本稿では $\hbar = c = 1$ の単位系は使うが，$G_d = 1$ の単位系は用いない．プランク単位系を使わないのは，超弦理論ではプランク長さは基本的な長さのスケールではなく，弦の典型的な広がり l_s が基本的であるからである．両者の間には 10 次元では

$$l_{10}^8 \sim g_s^2 l_s^8 \tag{1.2}$$

の関係がある(§3.1)．ここで g_s は超弦理論の結合定数である．状況次第でどちらのスケールもしばしば登場するので，どちらのスケールもあらわに書くことにする．なお熱力学的な議論では，ボルツマン定数 $k_{\mathrm{B}} = 1$ の単位系もしばしば使う．ただし，最初の 2 章ではこれらの単位系は用いず，すべての定数をあらわに書くことにする．

以下の記号もしばしば用いられる：

A	4 次元時空でのホライズンの面積
A_d	d 次元時空でのホライズンの $(d-2)$ 次元「面積」
G	4 次元ニュートン定数
$g_{\mu\nu}$	ストリング・メトリック(§3.1)
$g^{\mathrm{E}}_{\mu\nu}$	アインシュタイン・メトリック
L	ラグランジアンのスカラー部分($S \equiv \int d^dx\sqrt{-g}L$)
l_{pl}	4 次元プランク長さ($\sim 1.6 \times 10^{-33}$cm)
m_{pl}	4 次元プランク質量($\sim 1.2 \times 10^{19}\mathrm{GeV}/c^2 \sim 2.2 \times 10^{-5}$g)
t_{pl}	4 次元プランク時間($\sim 5.4 \times 10^{-44}$s)
M	ブラックホールの質量
Q	ブラックホールの電荷
ϕ	ディラトン場

2章 一般相対論におけるブラックホール

ブラックホールは，物質が重力に引かれて収縮していくという現象(重力崩壊)の結果として生まれる．重力の観点からいえば，これは星よりも自然な現象である．重力は常に引力として働く．このため，何らかの外向きの力がなければ，重力に対抗して安定でいることはできない．星は，核反応から生じる圧力によって星を支えている．しかし，十分な質量をもつ星は，核反応を終えるともはや重力に対抗できる圧力を生み出すことができなくなり，重力崩壊を起こすしかない．重力崩壊により星がある臨界半径以下に縮むと，星からの光は外には脱出できなくなる．光が外に出られない領域がブラックホールであり，この境界をホライズンと呼ぶ．ホライズンからは光さえも出られないので，ホライズンはブラックホールの内から外へ因果的な影響が及ぶ限界である．

一般相対論でのもっとも単純なブラックホール解は，シュワルツシルト(Schwarzschild)解として知られており，メトリックは

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{r_0}{r}\right) dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{r_0}{r}} + r^2 d\Omega_2^2 \tag{2.1}$$

で与えられる．ここで $d\Omega_2^2$ は半径 1 の S^2 の面積要素，ホライズンの位置は $r = r_0$ で，シュワルツシルト半径と呼ばれる：

$$r_0 = \frac{2GM}{c^2} \tag{2.2}$$

この解から

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} R^{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{12 r_0^2}{r^6} \tag{2.3}$$

のようなリーマン・テンソルなどで作られる座標不変な量を考えると，$r = 0$ で発散している．この $r = 0$ の場所は特異点と呼ばれ，重力が無限に強くなる場所である．

もっとも，このような発散は現実のものとは考えにくい．実際，微小なスケールでは重力の量子効果が重要になりうる．今考えている長さのスケールを l とすると，曲率の量子論的ゆらぎは

$$\Delta R \sim l_{\rm pl}/l^3 \tag{2.4}$$

程度になることが期待される[52)]．一方，曲率は $R \sim 1/l^2$ 程度であるので，$l < l_{\rm pl}$ 程度にまで曲率が強くなるとゆらぎの効果は重要となろう．このため特異点の古典論的な扱いだけでは不十分である．つまり特異点とは，一般相対論が破綻し別の理論が必要とされる場所を示していると見なすべきである．

このため，量子重力理論が特異点をどう記述するのか非常に興味深い．しかも，一般相対論によると特異点は特殊な存在ではない．重力が十分に強くなりブラックホールができると，必ず特異点が生じなければならない(特異点定理)[36)]．そこで，4, 5 章では超弦理論が特異点問題にどういう立場をとっているかを見ていく．

なお，シュワルツシルト解では特異点はホライズンによって囲まれているが，そうでない場合は裸の特異点と呼ばれる．現実の宇宙で特異点が常にホライズンで囲まれているかどうかは，一般相対論の未解決問題のひとつである．しかし，このことは比較的よく成り立っているようである．この仮説，宇宙検閲仮説についても §5.2 で見ることにする．

さて，いったん星がブラックホールになり定常状態に落ちつくと，ブラックホールは質量，角運動量，電荷のみで指定される．この一連の結果は，ノー・ヘア定理(no-hair theorem)として知られている[37)]．つまり，ブラックホールはもとの星の他の性質，例えば形や組成などにはよらない．逆にいえば，少数の初期条件にのみ制限されるので，ひとつのブラックホールには様々な作り方があることになる．

ホライズンの半径はブラックホールの質量に比例するため，物質がブラックホールに落ち込むとホライズンの面積は増大する．増え続ける一方であるこの量は，熱力学のエントロピーを思い起こさせるので，このエントロピーのような量をブラックホール・エントロピーと名づける．実は第 2 法則に限らず，ブラックホールの古典論的な性質は熱力学の第 0～第 3 法則の形でまとめること

表 2.1　熱力学とブラックホールの法則の比較．熱力学に対応して常にブラックホールの法則がある．M はブラックホールの質量，A はホライズンの面積，表面重力 κ は，静止している観測者が感じる重力の強さである．

	熱力学	ブラックホール
第 0 法則	熱平衡で T 一定	ホライズンで表面重力 κ は一定
第 1 法則	$\mathrm{d}E = T\mathrm{d}S$	$\mathrm{d}M = \dfrac{\kappa}{8\pi G}\mathrm{d}A$
第 2 法則	$\mathrm{d}S \geqq 0$	$\mathrm{d}A \geqq 0$
第 3 法則	$T = 0$ は到達不可能	$\kappa = 0$ は到達不可能

ができる（表 2.1）[7]．

この対比からブラックホールは表面重力 κ に比例した温度をもつのではないかと考えられる．事実 1974 年，ホーキングは物質場の量子効果により，ブラックホールが

$$T = \frac{\hbar\kappa}{2\pi k_{\mathrm{B}} c} \tag{2.5}$$

の温度の黒体放射をおこなうことを示した（ホーキング放射）[33]．したがって，第 1 法則からエントロピーは

$$S_{\mathrm{BH}} = \frac{A}{4G\hbar} k_{\mathrm{B}} c^3 \tag{2.6}$$

となる．ホーキング放射の発見により，ブラックホールの法則はブラックホールに適用された熱力学の法則そのものではないかと解釈される．ところで，熱力学の法則は統計力学という微視的な理論から導出できる．このためブラックホール・エントロピーも，統計力学的に導出できると期待される．統計力学では

$$(\text{エントロピー}) = \log\,(\text{系の縮退度}) \tag{2.7}$$

であるので，ブラックホール・エントロピーも何らかの意味でブラックホールの縮退度を見積もっていると考えられる．

ホーキング放射がもたらした帰結については 7 章でさらに詳しく議論するが，ここで典型的なブラックホールの熱力学的諸量の値を見積もってみよう．シュワルツシルト・ブラックホールに対しては，ホーキング温度は

$$T = \frac{\hbar c^3}{8\pi G k_{\mathrm{B}} M} \sim 6 \times 10^{-8} \left(\frac{M_{\odot}}{M}\right)\ \mathrm{K} \tag{2.8}$$

となる．ここで $M_\odot$ は太陽質量($\sim 2\times 10^{33}$g)である．放射は黒体放射であるので，ブラックホールが蒸発しきる時間は，シュテファンの法則，$\mathrm{d}E/\mathrm{d}t = -\sigma AT^4$ から見積もることができる($\sigma = \pi^2 k_\mathrm{B}^4/60\hbar^3 c^2$ はシュテファン-ボルツマン定数)．式 (2.6), (2.8) より

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} \sim -AT^4 \sim -\frac{1}{M^2} \tag{2.9}$$

を解くと*

$$\tau_\mathrm{BH} = 2560\pi \frac{G^2 M^3}{\hbar c^4} \sim 10^{74} \left(\frac{M}{M_\odot}\right)^3 \ \mathrm{s} \tag{2.10}$$

となり，太陽質量程度のブラックホールに対しては宇宙年齢($\sim$ 100 億年 $\sim 10^{17}$s)よりはるかに長い．

ブラックホール・エントロピーは式 (2.2), (2.6) から

$$S_\mathrm{BH} = \frac{4\pi k_\mathrm{B}}{\hbar c} GM^2 \sim 10^{77} k_\mathrm{B} \left(\frac{M}{M_\odot}\right)^2 \tag{2.11}$$

となる．このエントロピーは宇宙全体の陽子数($\sim 10^{80}$)に匹敵する莫大な数である．一方，太陽のエントロピーはこれよりはるかに少ない．核子あたりのエントロピーをほぼ $O(1)$ とすると，太陽のエントロピーは

$$S_\odot \sim k_\mathrm{B} \frac{M_\odot}{M_\mathrm{p}} \sim 10^{57} k_\mathrm{B} \tag{2.12}$$

にしかならない**．ここで M_p は陽子の質量である．ブラックホールは，ノー・ヘア定理により質量や角運動量などの少数のパラメータのみで指定される．このため，ブラックホールには太陽と比べて多くの作り方がある．したがって太陽のエントロピーだけでは，ブラックホールの縮退度をつくしたことにはならないのである．実際，大ざっぱにブラックホールの可能な作り方を見積もると，S_BH 程度のオーダーになることが知られている[62,86]．

---

* ここで放射が，光子のように自由度 2 をもつと仮定した．

** 実際の核子あたりのエントロピーは，非相対論的単原子理想気体のエントロピーから見積もることができ，$O(10)$ 程度であるので $S_\odot \sim 10^{58} k_\mathrm{B}$ となる．ちなみに放射のエントロピーは $S_\mathrm{rad} \sim 10^{53} k_\mathrm{B}$ 程度であり無視できる．

3章 場の古典論としての超弦理論

超弦理論における基本的な物体は，素粒子ではなくストリング・スケール l_s 程度のきわめて小さな広がりをもつひもである*．しかし，ストリング・スケールはきわめて小さな長さなので，巨視的にはひもは素粒子と見なせる．

ひもが振動すると，振動はエネルギーをもつので，巨視的には振動のエネルギー分の質量をもつ素粒子として見える．さらに振動のエネルギーが違うと，それぞれ異なる質量をもつ素粒子として見える．弦の固有振動は無限にあるので，超弦理論は無限個の素粒子の存在を予言することになる．ただし，通常知られている素粒子，物質場の粒子やゲージ場の粒子，グラビトン(重力を媒介すると考えられる素粒子)などは，もっとも低い振動から出て来る．それ以外の振動は，$1/l_s \sim O(m_{\rm pl})$ 以上という素粒子としてはたいへん重い質量をもつ．このため，通常もっとも低い振動のみが重要になる．

このように弦の広がり l_s が十分に小さいと見なせるときは，超弦理論は少数の知られている素粒子で表されるので，ふつうの場の理論で書けるはずである．実際，このような理論は超重力理論として知られている．しばらくの間はこの近似のもとでの超弦理論を考えることにする．

3.1 超重力理論

一般相対論の作用は

$$S_{\rm GR} = \frac{1}{16\pi G}\int \mathrm{d}^4x\sqrt{-g}\,(R + L_{\rm matter}) \tag{3.1}$$

で表される．ここで $L_{\rm matter}$ は適当な物質場を表す．一方，超弦理論で現れる

---

* 現実世界では，弦の相互作用は弱いと期待されるので($g_s < 1$)，式 (1.2) から l_s はプランク長さ $l_{\rm pl} \sim 10^{-33}$cm より 2〜3 桁大きい程度の長さであると考えられている．

主な超重力理論の作用は

$$S = \frac{1}{16\pi G_d} \int \mathrm{d}^d x \sqrt{-g} \left\{ \mathrm{e}^{-2\phi} (R + 4(\nabla\phi)^2) + \mathrm{e}^{2a\phi} L_{\mathrm{matter}} \right\} \tag{3.2}$$

となる．ここで ϕ はディラトン(dilaton)と呼ばれるスカラー場，L_{matter} は超弦理論に含まれる様々な物質場を表し，ゲージ場やフェルミオン場などが含まれる．ゲージ場については§3.4 で議論する．a は定数であり，値は考えている物質場による．ここではこの作用をどう導くかについては議論せず(§6.1)，このような作用とその帰結について考える．また上の作用では時空の次元は任意の d としている．しかし，これも後で簡単に触れるが，弦理論は任意の次元で定式化できるわけではなく，超弦理論ならば 10 次元，フェルミオンが入っていないボソン弦ならば 26 次元で定式化される．ここでは一部の次元がコンパクト化され，d 次元の巨視的な次元をもっている場合と解釈する．

式 (3.2) で特徴的な点のひとつは，リッチ・スカラーの部分が単純に一般相対論の形ではなく，ディラトンのファクターがかかっている点である．このため，ニュートン定数はディラトンの定数部分 $\mathrm{e}^{2\phi_0}$ にあたる．超弦理論の結合定数 g_s は $g_s \equiv \mathrm{e}^{\phi_0}$ と定義されるので，このことから式 (1.2) が導かれる．またディラトンが定数でないときは，ニュートン定数は時間的・空間的に変化しうる．

しかし，ここでメトリックに

$$g^{\mathrm{E}}_{\mu\nu} = \mathrm{e}^{-4\phi/(d-2)} g_{\mu\nu} \tag{3.3}$$

という変換(コンフォーマル変換)を施すと，式 (3.2) は

$$S_{\mathrm{E}} = \frac{1}{16\pi G_d} \int \mathrm{d}^d x \sqrt{-g^{\mathrm{E}}} \left\{ R_{\mathrm{E}} - \frac{4}{d-2} (\nabla\phi)^2 + \mathrm{e}^{2b\phi} L_{\mathrm{matter}} \right\} \tag{3.4}$$

と変換される．ここで，式 (3.4) では添字の上げ下げなどは $g_{\mu\nu}$ ではなく，$g^{\mathrm{E}}_{\mu\nu}$ でおこなう．また a も一般には違う定数 b へと変換される．しかしその具体形は L_{matter} でメトリックがどう入っているかによるので，ここでは述べない．

式 (3.4) は，アインシュタイン-ヒルベルト作用に様々な物質場が結合した形になっている．式 (3.2) の形の作用をもつメトリック $g_{\mu\nu}$ をストリング・メトリック，式 (3.4) の作用をもつメトリック $g^{\mathrm{E}}_{\mu\nu}$ をアインシュタイン・メトリックと呼ぶ．このように，コンフォーマル変換によってメトリックを再定義する

ことを，コンフォーマル・フレームを選ぶという．しかしコンフォーマル変換は，場の再定義にすぎないため，物理的にはどちらも同等な予言をし，どちらがより基本的ということはない*．

3.2　等価原理とディラトン

式 (3.2) で，物質場の作用は $e^{2a\phi}L_{\mathrm{matter}}$ という形になっている．物質場がメトリックだけではなくディラトンにも結合していることは，物質場から作られるテスト粒子が，このメトリックで見た測地線に沿っては運動しないことを意味する．しかもパラメータ a の値は，物質場の種類によって違っている．したがって違う組成の(ディラトンの結合が違う)粒子は違う軌跡を描く．このことは，超弦理論が等価原理を破っていることを意味する**．

実験では等価原理がたいへん良く確かめられており，また質量ゼロのスカラー場も発見されていない．したがってこれは明らかに実験に反する．このため超弦理論が正しい理論であるためには，ディラトンが質量をもたなければいけない．しかし，ディラトンはグラビトンと同じ超対称多重項に属しているので，超対称性が破れた後でのみディラトンは質量をもてる．超対称性の破れは TeV スケールで起こると考えられているため，ディラトンも TeV 程度の質量をもつことが期待される．これは等価原理の実験結果と矛盾しない十分な重さである．

もっとも，これは別の問題を引き起こしかねない．スカラー場のポテンシャルは宇宙項の働きをするので，スカラー場が重さをもつと観測に反してしまう可能性がある．この点は現状ではよくわかっていないが，現在の宇宙項問題のポイントは，超対称性の破れの後にもなぜ宇宙項がゼロに近いのかを説明することにある．したがって，超対称性の破れによるポテンシャルならば今後の発展によって解決できる可能性が高い．ただし超対称性の破れは非摂動論的な効

---

* 本稿では，線素 ds^2 を常にストリング・メトリックで書く．

** これは正確には「弱い等価原理」(weak equivalence principle)の破れを意味する[82]．この帰結として，一般に重力質量と慣性質量は同じではない．「強い等価原理」(strong equivalence principle)は “comma-goes-to-semicolon rule” と解釈されることが多いが，超弦理論はこの意味での強い等価原理も破っている．超弦理論は等価原理を破っているものの，これはディラトンが存在するためであり，局所ローレンツ系をとれないという意味ではない．なお，重力の代替理論として有名なブランス-ディッケ(Brans-Dicke)理論はこのような結合を許さない点が，超弦理論との大きな違いである[81]．これはまさに等価原理を保つためである．

果であり，現在のところ計算できない．

現実世界においてはディラトンは質量をもつと考えられる．しかし，以下でもいくつかの理由からディラトンを質量ゼロとして扱うことにする．第一に超弦理論の多くの応用では，超対称性が破れていない仮想的な世界を考える．これらの応用では超対称性の性質が欠かせない(§3.3)．第二に，ディラトンのコンプトン波長は $\lambda_{\mathrm{dilaton}} = 1/M_{\mathrm{dilaton}}$ であるので，現実世界でも $\lambda_{\mathrm{dilaton}}$ より小さなスケール l においてはディラトンの質量は無視できる．それよりも大きなスケールでのみディラトンの質量が効き始め，ディラトンの期待値はほぼ定数に固定されているであろう．この場合，超弦理論からの予言は一般相対論と似てくる．

ブラックホールの場合，ディラトンの質量は 2 つの場合に無視できる．ひとつはシュワルツシルト半径が，ディラトンのコンプトン波長より小さいブラックホールの場合である．一方，大きいブラックホールの場合は，超弦理論の解はシュワルツシルト解に近づくと期待される．したがって，天文学的なブラックホールについては超弦理論の予言は一般相対論からの違いは少ないであろう．しかし，ホーキング放射で小さくなったブラックホールの運命については，大きな違いをもたらす可能性がある（7 章）．さらに曲率は $R \sim 1/l^2$ 程度であるので，特異点近傍のような曲率の強い領域でも，ディラトンは質量ゼロとして振る舞うと思われる．したがって特異点問題を考える上でも，ディラトンを質量ゼロとしておくと都合がよい．

3.3　BPS ブラックホール

2 章では，もっとも単純なブラックホール，シュワルツシルト解を考えていた．しかし，一般相対論では別の種類のブラックホールも知られている．例えば，ブラックホールに電荷 Q をもたせることも可能であり，角運動量が 0 の場合はライスナー-ノルドストリューム(Reissner-Nordström)解と呼ばれる：

$$\mathrm{d}s^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{r} + \frac{GQ^2}{r^2}\right)\mathrm{d}t^2 + \left(1 - \frac{2GM}{r} + \frac{GQ^2}{r^2}\right)^{-1}\mathrm{d}r^2 + r^2\mathrm{d}\Omega_2^2 \tag{3.5}$$

この解は $r = r_\pm$ に 2 つのホライズンをもち

$$r_\pm = GM \pm \sqrt{G^2M^2 - GQ^2} \tag{3.6}$$

特異点は $r = 0$ である．

この特異点は $\sqrt{G}M > Q$ の場合はホライズンに隠される．一方 $\sqrt{G}M < Q$ の場合は，式 (3.6) が実数ではない．この場合はホライズンがないので，裸の特異点である．したがって，ブラックホールは

$$\sqrt{G}M \geqq Q \tag{3.7}$$

の場合に限られる．なお $\sqrt{G}M > Q$ のブラックホールはホーキング放射を起こし，最終的に $\sqrt{G}M = Q$ のブラックホールへと落ちつく．$\sqrt{G}M = Q$ の場合は，ホーキング温度が 0 になるので放射を起こさないからである．この極限の場合を極限ブラックホール (extreme black hole) と呼ぶ．

超対称性をもつ理論では，このような制限は超対称性代数からの自然な帰結である．超対称代数は形式的に

$$Q_{\text{SUSY}}^2 = H \pm Q \tag{3.8}$$

という形をしている．Q_{SUSY} は超対称変換の生成演算子，H はハミルトニアン，Q は電荷である．上式の期待値をとると，左辺は

$$\langle\psi|Q_{\text{SUSY}}^2|\psi\rangle = ||Q_{\text{SUSY}}|\psi\rangle||^2 \geqq 0 \tag{3.9}$$

となる．したがって，状態 $|\psi\rangle$ のエネルギー E と電荷 Q の間には

$$E \geqq |Q| \tag{3.10}$$

の関係がつく．これはライスナー-ノルドストリューム解が，ブラックホールである条件 (3.7) と一致する．特に $|\psi\rangle$ が超対称変換 Q_{SUSY} の下で不変な状態であるとき

$$Q_{\text{SUSY}}|\psi\rangle = 0 \tag{3.11}$$

は $E = |Q|$ となり，BPS 状態 (Bogomol'nyi-Prasad-Sommerfield) と呼ばれる．この BPS 状態が極限ブラックホールに相当する状態である．

この議論のポイントは，BPS 状態に対してはエネルギーが対称性の情報のみで決まる点である．したがって，結果は弱結合か強結合かによらない．このような性質から，通常計算が困難な強結合についても，BPS 状態に対してはある程度の情報が得られる．このため BPS 状態は，近年の研究で大きな役割を果たしている．例えば，§7.4 でブラックホール・エントロピーを弦理論的に導出する際にこの性質が本質的となる．

なお，厳密には極限ブラックホールと BPS ブラックホールは違う概念であり，極限ブラックホールはホーキング温度が 0 であるブラックホールを指す．すべての極限ブラックホールが BPS ブラックホールであるわけではない．例えばカー(Kerr)解は，適当な角運動量で極限ブラックホールになるが，これは BPS ブラックホールにはなりえない．

3.4　ゲージ場と広がりをもったブラックホール：ブラックブレーン

一般相対論では，定常なブラックホールのホライズンは，適当な条件の下で S^2 のトポロジーをもつ(トポロジー定理)[文献 35) の命題 9.3.2]．高次元の重力理論のひとつの特徴は，ホライズンが球形以外に様々なトポロジーをとりうる点である[43)]．つまり，ひも状や膜状のブラックホールもありうる．ホライズンが空間的に無限に伸びている方向が p 次元あるとすると

$p=0$　ブラックホール（球形のホライズン：S^{d-2}）

$p=1$　ブラックストリング（ひも状のホライズン：$\mathbb{R}^1 \times S^{d-3}$）

$p=2$　ブラックメンブレーン（膜状のホライズン：$\mathbb{R}^2 \times S^{d-4}$）

⋮　　⋮

となる．これらを総称して，一般にブラック p ブレーン(p-brane)と呼ぶ．この広がりの次元 p は，ブラックブレーンがもつ電荷の種類によって決まる．p ブレーンは $(p+1)$ フォーム・ポテンシャル A_{p+1} の電荷をもっている．

$(p+1)$ フォーム・ポテンシャルは電磁場の自然な拡張であり，様々な超重力理論において作用 (3.2) の $L_{\rm matter}$ に現れる．電磁場と同様，ポテンシャル A から場の強さ F を

$$F_{p+2} = \mathrm{d}A_{p+1} \quad (\mathrm{d}：外微分) \tag{3.12}$$

として定義する．この場の強さ F はゲージ変換

$$A_{p+1} \to A_{p+1} + \mathrm{d}\Lambda_p \quad (\Lambda_p\text{：任意の } p \text{ フォーム}) \tag{3.13}$$

の下で不変である．場の強さ F は，一般に「マクスウェルの方程式」

$$\mathrm{d}^* F_{p+2} = J_{d-p-1} \tag{3.14}$$

を満たす．${}^*F_{p+2}$ は F_{p+2} のホッジ双対であり，$(d-(p+2))$ フォームである．J はゲージ場のソースとなるカレントである．残りの運動方程式，ビアンキ恒等式 $\mathrm{d}F_{p+2}=0$ は外微分の性質から導かれる．

電磁場と同様，ゲージ対称性の存在は保存する電荷があることを意味する．上式は $(d-p-1)$ フォームであるので，$(d-p-1)$ 次元体積 V^{d-p-1} で積分するとスカラー量が得られる．これが電荷 Q である：

$$Q_{d-p-1} = \int_{V^{d-p-1}} \mathrm{d}^* F_{p+2} \tag{3.15}$$

$$= \int_{S^{d-p-2}} {}^*F_{p+2} \tag{3.16}$$

ここで第 2 式では体積積分を表面積分にするため，ストークスの定理を用いた．${}^*F_{p+2}$ は $(d-p-2)$ フォームであるので，積分は $(d-p-2)$ 次元をもつ多様体上でおこなわなければならない．これはちょうど p ブレーンを囲むには $S^{d-p-2}\times \mathbb{R}^p$ が必要であるという直観的な描像と一致する(図 3.1)．例えば 4 次元のブラックホールを囲むには S^2 が必要であり，それに対応して積分は S^2 でおこなう．同様に，4 次元のブラックストリングを囲むには $S^1\times\mathbb{R}$ が必要であり，積分は S^1 でおこなう．

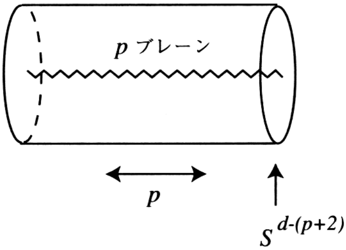


図 3.1　$S^{d-p-2}\times\mathbb{R}^p$ を使って p ブレーンを囲む．

表 3.1　Type II 超弦理論に現れるブレーンの種類．以下では，NS-NS ゲージ場の電荷をもつブレーンを NS ブレーン，R-R ゲージ場の電荷をもつブレーンを RR ブレーンと呼ぶ．

ブレーンの種類	ブレーンが現れる超弦理論
NS1 ブレーン	IIA および IIB
NS5 ブレーン	〃
RRp ブレーン（p: 偶数）	Type IIA 超弦理論
RRp ブレーン（p: 奇数）	Type IIB 超弦理論

実際にどのようなゲージ場／ブレーンが許されるかは，超弦理論の種類によって異なる．例えば Type II 超弦理論のゲージ場には 2 種類あり，Neveu-Schwarz–Neveu-Schwarz (NS-NS) ゲージ場と Ramond-Ramond (R-R) ゲージ場と呼ばれる．これらのゲージ場に応じて，表 3.1 であげたブレーンが存在する．このうち NS1 ブレーンは，巨視的な長さの弦が周りに作る重力場を表している(§6.2)．

超重力理論が存在する最大の次元は，11 次元であることが知られている．この 11 次元超重力理論もゲージ場をもち，表 3.2 のようなブレーン解が許される．Type IIA 超重力理論は，11 次元超重力理論で 1 次元分をコンパクト化することで得られる．そこで Type IIA 超重力理論のブレーンは 11 次元超重力理論のブレーンと関係づけられる．なお，この超重力理論は標準的な超弦理論では表されないが，M 理論と呼ばれる未発見の理論の近似になっていると考えられている．この M 理論は，様々な理由から「超弦理論」の定式化として適していると思われている．

またブレーンのほかにも，関連する解として平面波解やカルーツァ-クライン・モノポール解がある．これらは一般相対論の真空解であり，超弦理論・11 次元超重力理論でも物質場をすべてゼロとおいたときの解となっている．これ

表 3.2　M 理論(11 次元超重力理論)と Type IIA 超弦理論に現れるブレーンの関係．W は平面波解，KK はカルーツァ-クライン・モノポールを表す．M 理論の各ブレーンからコンパクト化によって → の先の Type IIA 超弦理論のブレーンが出る．

M 理論	W	M2	M5	KK
	↙ ↓	↙ ↓	↙ ↓	↙ ↓
Type IIA	RR0 W	NS1 RR2	RR4 NS5	KK RR6

らの解はすべて適当な極限で BPS 解であり，本稿では主に BPS 極限のときを考える*.

3.5　超重力理論に対する補正

超重力理論の作用 (3.2) は超弦理論の近似であり，実際には弦理論的な様々な補正項 $L_{\mathrm{corrections}}$ がつく：

- 古典論的補正：弦理論に含まれるプランク質量以上の重い場の影響で加わる補正．例えば

$$l_s^2\left\{a_1 R_{\mu\nu\rho\sigma}R^{\mu\nu\rho\sigma}+a_2 R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}+a_3 R^2\right\}+\cdots \tag{3.17}$$

  係数 a_i の値は超弦理論の種類によって異なる．式 (3.17) は補正の最低次の部分であり，一般には無限に続く曲率テンソルの n 乗という形になる．またディラトンをはじめとする物質場を含んだ補正も現れうる．この種の補正は，α' 補正として呼ばれる．
- 量子論的補正：§3.1 で述べたように超弦理論のニュートン定数は $\mathrm{e}^{2\phi}$ にあたる．ディラトンの値が大きいときはプランク長さ l_{pl} が大きい場合に相当し，この場合量子論的補正 (2.4) が効いてくる．

超弦理論での多くのブラックホール解は，このような補正を含めずに求められている．このため解が本当に信頼できるかどうかは，これらの補正が無視できるかどうかにかかっている．なお，弦は広がった物体であるため，古典論的にさえ場の理論では表されないような新しい物理も存在する (§4.4, 4.5).

* 平面波解やカルーツァ-クライン・モノポールは，ゲージ場がないときの解であっても BPS 解になりうる．これらの解では運動量が電荷の働きをする．なお，多くのブレーンは BPS 極限ではホライズンがないため，正確にはブラックブレーンと呼ぶべきではない．しかし本解説では，ホライズンのない時空も「ブラックブレーン」と総称する．これは (i) 便宜上と，(ii) 非 BPS 状態や高次元に埋め込んだ後などはしばしばブラックブレーンになるからである．

4章 特異点問題

4.1 特異点定理とエネルギー条件

超弦理論でもっとも簡単なブラックホールは，シュワルツシルト解である．作用 (3.4) は，アインシュタイン-ヒルベルト作用の形になっている．このため，物質場をすべてゼロとおけば，一般相対論の真空解はいつも超弦理論の解となる(α' 補正 (3.17) を無視した場合)．また後で見るように，同じ近似の下で超弦理論のブレーンの多くが特異点をもっている．つまり，この近似の下では超弦理論にも特異点をもった解がある．

しかし，特異点問題を考える上では，このような近似解の存在だけでは十分ではない．第一に，特異点近傍では曲率が大きくなるので，α' 補正は大きく効いてくる．第二に，球対称解のような対称性の高い特定の解に，特異点があるかどうかはあまり重要ではない．特異点問題で重要なのは，特異点の発生が一般に避けることができないのかどうかである．一般相対論の特異点定理は，まさにこのような問題を扱っている．

ところで，一般相対論の諸定理はアインシュタイン方程式

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi G T_{\mu\nu} \tag{4.1}$$

の詳しい形にはよらない．特に物質場のエネルギー運動量テンソル $T_{\mu\nu}$ の具体形は仮定せず，一般的な仮定だけをおくことが多い．このため一般相対論の結果は，超重力理論にも比較的簡単に適用できる．このような $T_{\mu\nu}$ についての仮定は「エネルギー条件」(energy condition) と総称されている．例えば，弱いエネルギー条件はエネルギー密度が負にならないことなどを要請している．

そこで，まず一般相対論の諸定理に現れるエネルギー条件を考えよう．

エネルギー条件	定義	応用[35,78]
強い (strong)	$\left(T_{\mu\nu} - \dfrac{1}{d-2} g_{\mu\nu} T\right) t^\mu t^\nu \geqq 0$	特異点定理[36]
Dominant	$T_{\mu\nu} t^\mu \tilde{t}^\nu \geqq 0$	正エネルギー定理
		第 0 法則
		トポロジー定理
		(ノー・ヘア定理)
		宇宙検閲仮説
弱い (weak)	$T_{\mu\nu} t^\mu t^\nu \geqq 0$	第 3 法則[47]
ヌル (null)	$T_{\mu\nu} n^\mu n^\nu \geqq 0$	第 2 法則
		ホログラフィック c 定理[2]

ここで $t, \tilde{t}$ は任意の未来向きの (future-directed) 時間的ベクトルまたはヌル・ベクトル，n は任意のヌル・ベクトルである．上の諸定理はエネルギー条件だけで導かれるわけではなく，実際にはエネルギー条件以外にも様々な仮定をしている．また宇宙検閲仮説はまだ証明されていないが，予想の定式化では上の条件がしばしば仮定されている[78]．上の条件式から，各エネルギー条件の間には次のような関係があることがわかる：

強い

↘

ヌル

↗

Dominant　→　弱い

ここで → は，矢印の先の条件の方が弱いことを示す．

さて，特異点定理にはいくつかのバージョンがあるが，そのうちのひとつでは以下の仮定が満たされるときに特異点が生じると述べている [文献 35)§8.2 の定理 2]：

1. 強いエネルギー条件が満たされている．
2. ヌル測地線がすべて収束するようなコンパクトな面が存在する．この面は

捕捉面(trapped surface)と呼ばれる.

3. 閉じた時間的曲線(closed timelike curve)をもたない.
4. 一般性条件(generic condition)[78]が満たされている.

したがって，一般相対論に限らず，重力のどんなメトリック理論でもこれらの条件を満たしてさえいれば特異点が生じることが期待される．上の特異点定理は強いエネルギー条件を仮定しているため，以下ではこの条件について考えてみよう.

強いエネルギー条件は，質量ゼロのスカラー場やゲージ場に対して満たされている．しかし，物理的には自然と思われるような場合でもこの仮定は破られうる．例えば，スカラー場 φ が質量をもつと

$$\left(T_{\mu\nu}^{(\mathrm{scalar})} - \frac{1}{d-2} g_{\mu\nu} T^{(\mathrm{scalar})}\right) t^\mu t^\nu = (t \cdot \nabla\varphi)^2 + \frac{1}{d-2} m^2 \varphi^2 t^2 \ngeq 0 \quad (4.2)$$

上式の第 1 項は正定値である．しかし第 2 項は，時間的ベクトルの定義 $t^2 < 0$ から負であるため，上式は負になりうる．同様にスカラー場の正のポテンシャルもこの条件を破る．またスカラー場のポテンシャルは宇宙項に寄与するため，正の宇宙項もこの条件を破る．このため，インフレーション宇宙でもこの条件は破られる.

さらに弦理論の場合，ストリング・メトリックではディラトンはこの条件を破っている．また α' 補正からの寄与も形式的にアインシュタイン方程式 (4.1) の右辺と考えると，これも強いエネルギー条件を破っている．このため特異点定理は弦理論では成り立たない．したがって，超弦理論でのブラックホールには特異点がないものもありうる．例えば特異点近傍では曲率が大きくなるので，α' 補正を入れない解に特異点があっても，補正によって特異点は解消される可能性がある.

もっとも，実際にこれを確認することは困難である．というのは，式 (3.17) は無限に続く曲率テンソルの n 乗という形の項の初項にすぎない．この項が重要になる場合は，明らかに無限に続く項すべてが重要になるため，これらの補正をすべて取り入れなければ意味がない.

4.2　超弦理論における特異点のある時空

前節では α' 補正により，特異点が解消されうることを見た．しかし，α' 補正をすべて含む厳密解も知られており，なかには特異点をもつ場合もある．すべての α' 補正を含む解を求めることは実際上は困難であるので，これらの解は別の手法を用いて得られたものである(§6.1)．

§3.4 の極限ブラックブレーンのなかでは，NS1 ブレーンと平面波解は厳密解が知られており，特異点をもつ．NS1 ブレーン解[15]は

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}s^2 &= f^{-1}(-\mathrm{d}t^2 + \mathrm{d}x^2) + \mathrm{d}r^2 + r^2\mathrm{d}\Omega_7^2,\\
\mathrm{e}^{-2\phi} &= f,\\
B_{tx} &= f^{-1} - 1
\end{aligned}
\tag{4.3}
$$

ここでブレーンは x 方向に伸びており，$f = 1 + (r_0/r)^6$，特異点は $r = 0$ である($B_{\mu\nu}$ は §3.4 で A と書いていた 2 フォーム・ポテンシャル)．この解は α' 補正を入れない解として求められたものであるが，古典論的な補正をすべて取り入れても厳密解であることが知られている[45]．

また平面波解[31,42]は，低エネルギーで一般相対論に帰着するいかなる重力理論に対しても厳密解である：

$$
\mathrm{d}s^2 = -\mathrm{d}u\mathrm{d}v + \mathrm{d}x^i\mathrm{d}x_i + F(u, x^i)\mathrm{d}u^2, \quad \partial_i^2 F = 0 \tag{4.4}
$$

ここで添字 i は $1, \ldots, d-2$ から値をとる．この解の場合，リーマン・テンソルから作られるすべてのスカラーが消える．したがって，曲率が発散するというシュワルツシルト解の意味での特異点はない．しかし F が発散する解を考えると，発散する場所に近づくにつれて潮汐力が発散するという意味で，特異点の一種である．

この解では，古典論的補正からの寄与がすべて消えるため，弦理論の厳密解になっている．なぜならば，リーマン・テンソルから作られるすべての二階のテンソルも消えるからである．これは基本的にはリーマン・テンソルが

$$
\nabla_\mu l^\nu = 0, \quad l^2 = 0 \tag{4.5}
$$

であるようなヌル・ベクトル l^μ の 2 次に比例することからきている．l^μ のどんな縮約も消えるため，曲率テンソルどうしの縮約をとると必ず式 (4.5) に比例

し消える．さらに補正項の具体形によらず消えるので，この解はいかなる重力理論の解にもなっているはずである．したがって，いかなる理論でもこの平面波解の特異点は避けることができないはずである．

超弦理論に対して，一般的に成り立つ特異点定理は知られていない．このため一般相対論とは違い，重力崩壊の結果として特異点が必然的に現れると考える理由はない．しかし，特異点のある厳密解が知られているため，場の古典論としての超弦理論でも特異点は避けることができない．このように本来特異点という場合は，厳密解を見る必要がある．しかし簡単化のため，今後は主に α' 補正を無視して得られた解を見ることにする．

なお，超弦理論にはディラトンが存在するため，コンフォーマル変換 (3.3) のような場の再定義の不定性が常につきまとう．このため，曲率が発散するという意味での特異点の意味もはっきりしない．実際，特異点でディラトンは発散する傾向にあるので，コンフォーマル・フレームを変えると特異点は消えることがある．つまり，ディラトンの発散と曲率の発散は区別できない．しかしこの場合も $\mathrm{e}^{\phi} \to \infty$ となるため，超重力理論による記述が破綻する点では特異点と同じである (§3.5 の量子論的補正が強く効く)．このような広い意味で，超重力理論が信頼できない場所のことを「特異点」と呼ぶことにする．

4.3　高次元への埋め込み

一部の特異点は，単に高次元の超重力理論に埋め込むことによって解消することができる[22)]．ディラトンは高次元のメトリックの一部であるので，これはディラトンの発散と特異点をうまく組み合わせることで特異点を解消させる方法である．例えば 10 次元の Type IIA 超弦理論を 11 次元超重力理論に埋め込む場合

$$\mathrm{d}s_{11}^2 = \mathrm{e}^{-2\phi/3}\mathrm{d}s^2 + \mathrm{e}^{4\phi/3}(\mathrm{d}x^{11} + A_\mu \mathrm{d}x^\mu)^2 \tag{4.6}$$

とする．ここで $\mathrm{d}s_{11}^2$，$\mathrm{d}s^2$ はそれぞれ 11 次元と 10 次元の線素 (後者はストリング・メトリックによる線素)，x^{11} は 11 次元方向の座標である．

さて，超弦理論の極限ブレーン解の多くには特異点がある (α' 補正は無視したとする)．ストリング・メトリックでの極限 NS5 ブレーンには特異点はないが，ディラトンが発散するという意味でやはり特異的である．しかし，これら

表 4.1　表 3.2 に，各ブレーンが特異点をもっているかどうかも書き込んだもの(BPS 極限)．Type IIA のブレーンで曲率が発散するかどうかは，選ぶコンフォーマル・フレームにもよる．このためストリング・メトリックで見た場合($g_{\mu\nu}$)と，アインシュタイン・メトリックで見た場合($g^{\mathrm{E}}_{\mu\nu}$)を示した．また，ブレーンに近づくにつれて「結合定数」がどう変化するかも表示した．

M 理論		W		M2		M5		KK
特異点		T		×		○		○
	↗	↑	↗	↑	↗	↑	↗	↑
Type IIA	RR0	W	NS1	RR2	RR4	NS5	KK	RR6
特異点($g_{\mu\nu}$)	T	T	×	T	×	○	○	×
特異点($g^{\mathrm{E}}_{\mu\nu}$)	×	T	×	×	×	×	○	×
「結合定数」(e^{ϕ})	S	–	W	S	W	S	–	W

表 4.1 の凡例

特異点	○	特異点のない時空
	×	式 (2.3) のような曲率不変量が発散する特異点
	T	潮汐力が発散する特異点
「結合定数」	W	（ブレーンに近づくにつれて）弱結合
	S	強結合
	–	定数

の特異点は 11 次元の超重力理論に埋め込むことによって解消できる場合がある(表 4.1)．近年では超弦理論より M 理論の方が基本的な理論であると見られているので，この意味でブレーンの特異点はさほど深刻ではない．しかし，11 次元超重力理論にも特異点をもつ解があるし，高次元への埋め込みがない Type IIB 超弦理論にはこの方法は使えない．したがって明らかにこの方法だけでは不十分であるが，一部の特異点は大したメカニズムなしに解消できるというのは注意すべき点である．

なお平面波解などでの特異点については，この解自体は真空解であり「クーロン場」部分だけを表していると見なせる．このため，実際には場のソースをアインシュタイン方程式に入れなければならない．そうするともはや解は厳密解ではなくなり，α' 補正が効いてきて解の形が変わることで，特異点を消せるのではないかとも期待されている[76)]．

4.4　双対性と特異点

このように古典論的な時空として扱う限り，超弦理論においても特異点は解消できない．しかし，このことは超弦理論の物理がそこで特異的であることを意味しない．電磁気学のクーロン・ポテンシャルがよい例である．$r = 0$ で発散するこのポテンシャルは，量子論においても解消されるわけではない．しかし，量子化の結果の物理量自体は発散しない．このような意味で，量子論はクーロン・ポテンシャルの発散を避けることができるのである．

超弦理論の場合，古典論においてさえも話はさらに複雑である．超弦理論はしばしば "theory of everything" と呼ばれるように，弦やブレーン以外に自然な物体は存在しない．したがって，特異点は弦がそこで特異的な振る舞いをするかどうかが問題になる．物理が特異的でなければ，メトリックに特異点があっても問題にならない．

粒子の場合と比べると，時空の中で弦はしばしば奇妙な振る舞いをする．もっとも単純な例として，半径 R のシリンダーの表面上を運動する弦を考えてみる（図 4.1）．このような弦理論には特殊な対称性があり，半径 R のシリンダーと半径 l_s^2/R のシリンダーは弦には区別できない．これは双対性（duality）と呼ばれる対称性の一種であり，T 双対性（T-duality）と呼ばれる．

これは，弦にとってはシリンダーの半径は 2 つの方法で探れることに起因する．第一に，弦の運動量は

$$k = \frac{n}{R} \tag{4.7}$$

と量子化される（n: 整数）．これは初等量子力学の井戸型ポテンシャルの問題と

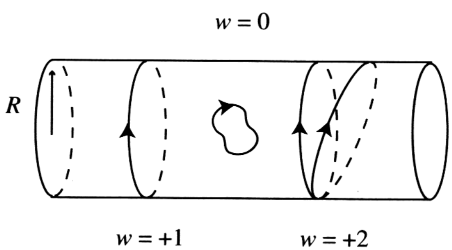


図 4.1　シリンダーの表面上を運動する弦．左より巻きつき数が 1 の弦，巻きついていない弦，巻きつき数が 2 の弦を表す．

同じである．しかし，弦はシリンダーの周りにも巻きつくことができる．その場合の弦のエネルギーは，弦が何回巻きつくかに比例して

$$E = \frac{wR}{l_s^2} \tag{4.8}$$

となる(w: 整数)．

ここで

$$R \leftrightarrow \frac{l_s^2}{R}, \qquad n \leftrightarrow w \tag{4.9}$$

と交換すると同じスペクトルが得られる．スペクトルが同じであるために，われわれは超弦理論を使う限り，半径 R のシリンダーと半径 l_s^2/R のシリンダーは区別できないことになる．この 2 つが物理的には同等であるため，非同等な理論は $R \geqq l_s$ に限られる．このことは弦理論には最小の長さ l_s が存在することも暗示する．

この $R \leftrightarrow l_s^2/R$ の対称性は，もっと一般の時空にも拡張できる．もっとも単純な場合は，もとの解を $(g_{\mu\nu}, \phi)$ とし解が座標 x によらないとすると，変換後の解 $(\tilde{g}_{\mu\nu}, \tilde{\phi})$ は

$$\tilde{g}_{xx} = 1/g_{xx}, \qquad \tilde{\phi} = \phi - \frac{1}{2}\ln g_{xx} \tag{4.10}$$

で与えられる．例として円柱座標でのミンコフスキー時空

$$\mathrm{d}s^2 = -\mathrm{d}t^2 + \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}r^2 + r^2\mathrm{d}\theta^2 \tag{4.11}$$

を考えてみよう．今，θ 方向に式 (4.10) の変換をおこなうことにする．これは $g_{\theta\theta}$ で $r \to l_s^2/r$ とすることに相当し，変換後のメトリックは $r=0$ で曲率が発散する．しかしこの時空での理論は，もとのミンコフスキー時空上での理論と同等なはずである．したがって，この特異点は場の古典論的なものにすぎず，弦理論的には特異点ではないはずである．このほかにも特異点のある時空と特異点のない時空が，このような変換でつながっていることが知られている[例えば文献 46)]．

T 双対性以外の双対性を使って特異点を解消する試みとしては

- ミラー対称性（§5.1）
- 重力／ゲージ理論双対性[48)]

などがある．またエンハンソン・メカニズム(Enhançon mechanism)は，T双対性と密接に関連した方法である[49]．このメカニズムでは，巻きついたブレーンが重要な役割を果たすが，これは見方を変えた巻きつきの弦にほかならない．

双対性を使った議論は，「困難を敷物の下に掃きこんで隠す」ような方法に思えるかもしれない．他の記述に移ることにより問題が解けたとしても，元の記述で問題がどう解けるのか明確ではないからである．そのうえ双対性の議論では，しばしば「他の記述」が超重力理論以外の理論にさえなりうる(例えば重力／ゲージ理論双対性では，超対称ゲージ理論)．現在のところ，超重力理論以上に時空についてのイメージがつかみやすい枠組みはないので，他の記述に移ったときに「心許なく」思えてしまうかもしれない．

しかし，超重力理論は超弦理論の近似のひとつにすぎない．様々な状況に応じて，超弦理論には様々な近似的な記述が存在する．われわれは，そのときの状況に応じてもっとも適当な記述を使うべきである．今の場合，超重力理論による近似が特異点では破綻して，他の近似が適当であるにすぎない．超弦理論そのものの立場からすれば，この場合超重力理論を捨てて，より良い近似を使うのは自然なことである．

双対性による方法は特異点を解消する興味深い可能性であり，メカニズム自体は弦の基本的な性質に基づいているため，将来的にも残りうる可能性であろう．さらに超弦理論のもつ対称性と関連するので，今後も進歩が待たれる．

4.5　その他の特異点

通常のシュワルツシルト解における特異点とは，曲率が発散する点であり，リーマン・テンソルなどで作られる座標不変な量が発散する場所を見ることによって探すことができる：

$$R_{\mu\nu\rho\sigma}R^{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{48G^2M^2}{r^6} \tag{4.12}$$

しかし，この種の特異点は一般相対論で現れうる特異点のひとつにすぎず，特異点には様々なタイプがあることが知られている[21,75]．一例としては，§4.2で挙げた平面波解がある．一般相対論で，特異点の定義として測地線の不完備性(geodesically incompleteness)を用いているのも，その辺の事情からきている．

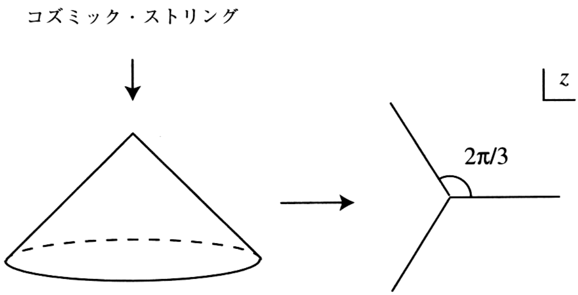


図 4.2　コズミック・ストリングは円錐状の空間で表される(左図)．図では時間方向とストリングに沿った方向は描かれていない．コズミック・ストリングは平面を同一視することで得られる(右図)．

測地線の不完備性とは，有限時間で終わる測地線のことをいう．この測地線に沿って動く観測者がそれ以上先に存在しえなくなったときに，特異点に到達したことになる．特異点の分類が困難であるため，直接特異点が何であるかを定義できないのである．

この節では，超弦理論でのその他の特異点の例としてコズミック・ストリングを取り上げる[77]．コズミック・ストリングに垂直な方向の時空は円錐状の空間で表される(図 4.2)．この円錐の角度を 2π から引いたものを欠損角(deficit angle)という．今，欠損角 $4\pi/3$ のコズミック・ストリングを考えよう．この円錐状の空間の代わりに，平面を考え 3 つの領域を同一視することもできる．平面を複素数 z で表すと，$z \to \exp(2\pi i/3)z$ と同一視することになる．同一視の結果，この平面は Z_3 対称性をもつので

$$\mathbb{R}^2/Z_3 \tag{4.13}$$

と書く．

円錐の頂点 $z=0$ は特異点の一種である．平面を同一視しただけなので，曲率は発散しない．しかし，$z=0$ の点はなめらかな多様体ではなく，測地線はそこで不完備となる．このような特異点は conical singularity と呼ばれ，同一視で得られた時空はオービフォールド(orbifold)と呼ばれる[17]．§4.4 で考えた半径 R のシリンダーも，不完備ではないもののオービフォールドの一例である．このようなシリンダーも，平面を $x \to x + 2\pi R$ と同一視することにより得ら

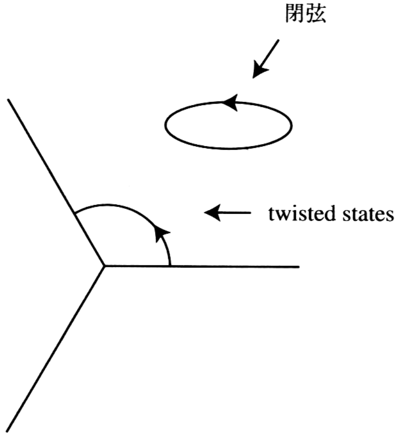


図 4.3　もとのミンコフスキー空間での閉じた弦以外にも，オービフォールドでは閉じた弦が存在する．

れる．

この時空での量子論を考えるとさらに問題がありうる．オービフォールドでの状態は，$\mathbb{R}^2$ での状態から Z_3 対称な状態だけを抜き出して得られる．しかし，手で落とした Z_3 非対称な状態は対生成で現れうる．$\mathbb{R}^2$ でのユニタリーな理論から出発すると，対生成する状態を落としてしまうとユニタリー性が破れることになる．しかし，ユニタリー性を破らないために対生成した状態を含んでしまうと，それでは最初の $\mathbb{R}^2$ の理論に戻ってしまう．

一方，超弦理論では矛盾のない理論を得ることができる．超弦理論でのスペクトルは，$\mathbb{R}^2$ の状態を一部落としたものだけではなく，新たな状態も導入される．オービフォールドでの閉じた弦は，何も平面での閉じた弦だけに限らない．Z_3 対称性があるので，Z_3 対称な意味で閉じていれば閉じた弦になるのである(図 4.3)．この弦は§4.4 での巻きついた弦に相当する．そしてこの新たに現れた状態(twisted states と呼ばれる)がユニタリー性を保つ．対生成によりもとの $\mathbb{R}^2$ 上の状態を回復する代わりに，twisted states を対生成するのである．

時空自体には特異点があっても，オービフォールド上での超弦理論は完全に無矛盾にできるので，特異点は問題にならない．§4.4 での双対性の議論と同様，ここでも弦が素粒子と違い広がりをもった物体であることが大きく効いている．

4.6　量子重力効果

ここまでの議論は，すべて古典論的な議論であった．さて微少なスケールでは重力の量子効果により，時空自体にもゆらぎがあると考えられてきた．一般には，このような効果により，特異点は解消できるのではないかと想像されてきた．式(2.4)から，長さのスケール l が $l < l_{\rm pl}$ 程度に小さくなったときにゆらぎが効いてくると予想される．また，$l_{\rm pl}$ を大きくしてもゆらぎが効いてくる．式(1.2)より，これは超弦理論では強結合 $g_s \gg 1$ をとることに相当する．

しかし現在の超弦理論は摂動論として定式化されており，$g_s < 1$ の場合以外はほとんどわかってはいない(§6.1)．とはいえ，超弦理論にはS双対性と呼ばれる $g_s \leftrightarrow 1/g_s$ という対称性が存在する．これは強結合での超弦理論が，(一般には別の)弱結合での超弦理論で表されるという主張である．重力の量子効果がどのようなものであれ，それは強い極限では単にミンコフスキー時空での別の超弦理論で表される程度のもののようである．このため超弦理論では，今のところこのようなシナリオは確かめられていない．また§4.7で見るような議論は，量子論にも当てはまるため，たとえ特異点でゆらぎの効果が重要になっても，特異点問題の完全な解決にはなりえない．

4.7　禁止される特異点

ここまで一般相対論における様々な特異点が，場合によっては超弦理論ではなめらかにできたり，特異点があっても問題にならないことを見てきた．これらを総称して特異点を解消する(resolve)と呼ぶ．しかし実は，どんな重力理論でもすべての特異点が解消できるわけではない[40]．むしろ

> ある種の特異点は，解消されるのではなく理論によって禁止されていなければいけない．

例えば，負の質量 $M < 0$ のシュワルツシルト解を考えてみよう．この解も一般相対論の解であるので，排除する先験的な理由はない．超弦理論でも，特異点から十分遠方では良い近似になっているはずである．一方，特異点 $r = 0$ の近傍では，α' 補正などにより特異点は解消され，なめらかな解になっている可能性もある．ところが，そうすると負エネルギーの正常な解があることになってしまい，ミンコフスキー時空が安定でなくなってしまう．仮にある理論が安定

な $E<0$ の基底状態を許すとしても，$M<E$ のシュワルツシルト解を考えることによって同じ議論ができる．つまりすべての特異点が解消できると，任意の負のエネルギー状態の存在が許され，スペクトルが下から拘束されない，基底状態の存在が保証されないことになってしまう．

このため一部の特異点の発生は，なんらかのメカニズムで理論によって禁止されていなければならない*．ここで考えた $M<0$ のシュワルツシルト解は裸の特異点であり，宇宙検閲仮説からこのような特異点は現実には現れないと思われる．実際，$M<0$ のシュワルツシルト解では重力が斥力になるため，重力崩壊によって生ずるかどうか疑問である．そこで理論によって禁止されるメカニズムの候補としては，この宇宙検閲仮説が挙げられる．§5.2 ではこの仮説の現状を見ることにする．

4.8　まとめ

この章では，超弦理論によってしばしば特異点が古典論的にすら解消されることを見てきた．そしてそのメカニズムも，エネルギー条件を破ったり，弦にとっては特異点が特異的でなくなったりと様々であることも見てきた(§4.1, 4.3, 4.4, 4.5, 5.1)．また，一部の特異点は解消されるのではなく禁止されるべきであることも見た(§4.7)．いずれのメカニズムも，弦やブレーンが広がった物体であるという点が本質的に効いている．しかし特異点を解決する個々のメカニズムは多様であり，これは特異点の多様性が一因である．一般相対論における特異点の多様性を見ると，特異点問題がひとつのメカニズムで解決される可能性は少ないように思える．また様々なメカニズムが発見されているものの，最も重要な特異点，シュワルツシルト特異点やビッグバン特異点をどう解決すればいいのか見当もつかないというのが現状である．

* 先に触れたエンハンソン・メカニズムも，実はこのような特異点を解消するのではなく，排除するひとつの方法である．

5章 その他の特異点に関連した問題

5.1 トポロジー変化

一般相対論では，空間は曲がり形は変わりうる．しかし空間が裂けることによって，空間のトポロジーが変わることはないのだろうか？　特に式 (2.4) のように，微視的なスケールでは曲率がきわめて激しいゆらぎを起こしているとすれば，ゆらぎによるトポロジー変化は自然に思える．

今，考えている時空 M が 2 つのコンパクトな空間的超曲面 S，S' をもち，S，S' は違うトポロジーであるとする（図 5.1）．このような時空 M は，場の方程式に何の仮定もなしに，必ず特異点か閉じた時間的曲線を含んでいることが示せる[20]．さらに，弱いエネルギー条件・一般性条件などの下では，トポロジー変化は必ず特異点を伴うことが知られている[74]．つまり一般相対論では，なめらかなトポロジー変化は起こりえない．そこで，この問題も特異点問題のひとつとして考えることができる．超弦理論では，なめらかなトポロジー変化は起こりうるのだろうか？

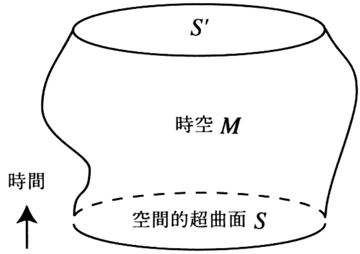


図 5.1　トポロジー変化．違うトポロジー S，S' をつなぐ時空 M は存在するか？

超弦理論は時空が10次元であることを予言する．しかし，現実の世界と対応がつくには，10次元のうち6次元部分がコンパクト化されていて微視的なサイズになっていなければならない．このような場合を考えて，トポロジー変化がコンパクト化した空間で起きている場合を考える．コンパクト化された方向を見ることができれば，トポロジー変化が見えるであろう．しかし6次元部分は微視的なサイズなので，通常の4次元での観測者にはその様子は見えない．代わりに相転移に出会う．トポロジーが変化すると，質量ゼロ粒子の数やゲージ対称性が変わるからである．超弦理論では質量ゼロ粒子の数などは，コンパクト化した空間のトポロジカルな情報によって決定される*．

例えば文献27,64)では，トポロジー変化の点でコンパクト空間の一部のS^3のサイズがゼロになる．このときS^3に巻きつくRR3ブレーンの質量はゼロになる（シリンダーに巻きついた弦(4.8)での，$R \to 0$の極限に対応)．トポロジー変化での特異性は，この新たな質量ゼロの粒子を低エネルギーの理論に含めないために起きたものである．さらにこの質量ゼロの場Φは，ゼロではない期待値をもちうる：

$$\langle \Phi \rangle \neq 0 \tag{5.1}$$

これは標準模型でのヒッグス場の凝縮と同様の現象である．特に，このことはゲージ場が質量をもちゲージ対称性が変わることを意味する．幾何学的にはこれらのプロセスは，当初のS^3を含んだコンパクト空間がS^2を含んだものに変化したように見える．

なお，このような現象は特異点を禁ずるエンハンソン・メカニズムでも起こる．この場合も巻きついたブレーンが質量ゼロになり，新たな自由度が生まれる．このため，超重力理論は特異点を予言するが，そもそもそのような解析自体が信頼できない．これまで弦やブレーンが特異点問題を解決する上で重要であることを見たが，これは広がった物体から新たな自由度が生まれるからである．

また文献4,83)のトポロジー変化の議論では，T双対性の一般化であるミラー対称性が用いられている．変換前の記述ではトポロジー変化が一見なめらかな変化ではないように見えても，変換後の記述ではなめらかな変化であることか

---

* 例えばフェルミオンの世代数は，コンパクト空間のオイラー数の半分の絶対値で与えられる．

ら，トポロジー変化がなめらかに起きていると結論づけられている．

5.2 宇宙検閲仮説

一般相対論では，$M<0$ のシュワルツシルト解のような裸の特異点は，物理的には生じないと見られている*．

> 弱い宇宙検閲仮説[56)]：漸近的ミンコフスキー時空で，物理的に「適当な」初期条件から出発した物理的に「適当な」物質の重力崩壊によって生じるすべての特異点は，ブラックホールに隠される．

この仮説を支持する説得力のある議論はないが，様々な状況証拠は存在する[79)]．

この仮説の存在は，一般相対論の予言可能性にとっても幸いである．特異点では一般相対論が破綻する．このため特異点が現れると，一般相対論による因果的記述が不可能になってしまう．しかしブラックホールの場合，特異点がホライズンに囲まれているため，特異点は遠方の観測者には因果的な影響を及ぼさない．つまり仮説は，特異点による影響は最低限にとどまり，時空の大部分では古典論の枠内で記述が可能であると主張する．なお，この仮説はブラックホールの様々な性質を導く上でも重要な役割を果たしている(第 2 法則，正エネルギー定理，トポロジー定理等)．

しかし，超弦理論をはじめとする高次元での統一理論は，一般に宇宙検閲仮説を破る可能性がある[29)]．これは，高次元での理論にはブレーンが存在するためである．

例として，S^1 コンパクト化した 5 次元の場合を考える．5 次元には電荷のない状態が 2 種類存在する．ひとつは S^1 に巻きついたブラックストリング解である：

$$\mathrm{d}s^2 = -\left(1-\frac{r_0}{r}\right)\mathrm{d}t^2 + \frac{\mathrm{d}r^2}{1-\frac{r_0}{r}} + r^2\mathrm{d}\Omega_2^2 + \mathrm{d}x^2 \tag{5.2}$$

ここで x は S^1 方向で，円周は長さ L とする．またホライズンの位置は $r=r_0=2G_4M$ である(M はブラックストリングの質量)．この解は，4 次元シュワルツ

* 宇宙検閲仮説には 2 つのバージョンがある．強い宇宙検閲仮説[57)]は，物理的にもっともらしいすべての時空には，初期特異点以外に観測可能な特異点は存在しない，というものである．特にこのことは，特異点が遠方の観測者のみならず，ブラックホールに落ちた観測者からも見えてはいけないことを要求する．

シルト時空と S^1 の直積にすぎない．さて，4 次元のニュートン定数は 5 次元の立場では $G_4 = G_5/L$ となる．なぜならば，コンパクト化された次元があると

$$\frac{1}{16\pi G_5}\int \mathrm{d}^5x\sqrt{-g_5}R_5 = \frac{L}{16\pi G_5}\int \mathrm{d}^4x\sqrt{-g_4}\{R_4 + \cdots\} \tag{5.3}$$

となる．したがって上の G_4 の定義で，4 次元の作用も標準的なアインシュタイン-ヒルベルト作用になる．（$\cdots$ はコンパクト化で現れる他の場を表す．）このことに注意すると，ブラックストリングのエントロピーは*

$$S_{\mathrm{string}} \sim \frac{A_4}{G_4} \sim \frac{r_0^2}{G_4} \sim G_4M^2 \sim \frac{G_5M^2}{L} \tag{5.4}$$

一方，5 次元における電荷のない状態としてはブラックホールもある．これは周期 L で並ぶ一群のブラックホールと考えることもできる．5 次元のシュワルツシルト解は

$$\mathrm{d}s^2 = -\left\{1-\left(\frac{\tilde{r}_0}{r}\right)^2\right\}\mathrm{d}t^2 + \frac{\mathrm{d}r^2}{1-(\frac{\tilde{r}_0}{r})^2} + r^2\mathrm{d}\Omega_3^2 \tag{5.5}$$

で与えられる．ここで $r = \tilde{r}_0$ はホライズンの位置を表す．一般相対論では M は常に G_dM の組み合わせで解に現れるので，次元解析より $\tilde{r}_0 \sim \sqrt{G_5M}$ となる．3 次元球面の面積は $2\pi^2r^3$ なので，この解のエントロピーは

$$S_{\mathrm{BH}} \sim \frac{A_5}{G_5} \sim \frac{\tilde{r}_0^3}{G_5} \sim \sqrt{G_5}M^{3/2} \tag{5.6}$$

となる．

したがって十分に大きい L に対しては $S_{\mathrm{BH}} > S_{\mathrm{string}}$ となり，ブラックホールの方がエントロピー的に有利になる．このためブラックストリングは不安定になり，ブラックホールに崩壊することが期待される(図 5.2)．実際，ブラックストリングは摂動に対して安定ではないことが数値計算によって示されている．しかし宇宙検閲仮説の仮定の下で，ホライズンは分岐(bifurcate)しない[例えば文献 78) の定理 12.2.1]．したがって，ブラックホールへの崩壊の過程で裸の特異点が生じるはずである．

* ここでは，コンパクト化された方向が「見えない」4 次元の観測者の立場からエントロピーを求めたが，5 次元の立場から求めても同じである．$G_4 = G_5/L$ と，「面積」が $A_5 = A_4L$ で関係づけられることを使うと，$A_5/G_5 = A_4L/G_4L = A_4/G_4$ となる．

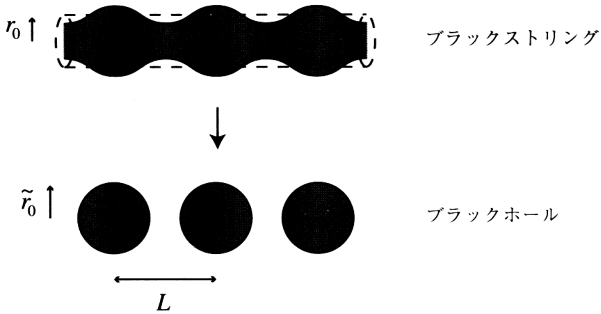


図 5.2　ブラックストリングは摂動に対して不安定である．ひとつの可能性はブラックホールへの崩壊であるが，この過程で裸の特異点が生成されうる．

なお，ここで議論しているブラックストリング解は，極限ブラックブレーンのような BPS 解ではない．BPS 解は超対称性の性質から安定であることが期待され，また解析の結果もそれを示している．さらに，これは極限でないブラックブレーンがもつホーキング放射による不安定性でもない．

また一般相対論のような 4 次元の理論では，このようなことは起こらない．そもそも適当なエネルギー条件の下で，漸近的にミンコフスキー時空となるようなブラックストリング解が 4 次元には存在しない[43]．これはトポロジー定理の帰結である(§3.4)．

厳密には，ブラックストリングが不安定であることは示されているものの，ブラックストリングがブラックホールに崩壊することは示されていない．実際ほかにも可能性が考えられる[39]．この点を数値計算等で確かめることは重要であろう．また仮にブラックホールに崩壊したとしても，様々な抜け穴が考えられるため，直ちに宇宙検閲仮説が破られているともいえない．

4 章では，超弦理論にとって特異点そのものが問題になるわけではないことを見た．このため超弦理論ではすべての裸の特異点を禁止する必然性はなく，宇宙検閲仮説が超弦理論で常に成り立っている必要はない．とはいえ，超弦理論でも一部の特異点は禁止する必要があるため，何らかのメカニズムが必要なことは変わらない．このようなメカニズムを定式化するのは興味深いであろう．ただし超弦理論では，メトリックはスペクトルのひとつにすぎないので，それ

だけを特別視する宇宙検閲仮説のような定式化には無理があろう*．その第一段階として，超弦理論ではどのような特異点が禁止されるべきかという提案もなされている[30,50]．

*§3.3 での BPS 状態についての議論から自然に思いつくのは，超対称性を宇宙検閲として使う方法である(少なくとも超対称性が残っているような宇宙では)．超対称な理論では，裸の特異点に相当する状態は禁止される．しかし，すべての極限ブラックホールが BPS ブラックホールになるわけではないので，あまり良い方法とは思えない．

6章 重力理論としての超弦理論

重力理論としての超弦理論は，次の3段階を考えることができる：

1. 場の古典論としての超弦理論：超重力理論
2. 摂動論としての超弦理論：曲がった時空上での超弦理論
3. 非摂動論的な量子重力理論としての超弦理論：？

これまでは主に1を考えてきたが，暗に2から得られた知識も用いてきた(§4.4, 4.5)．理論としての最終的な目標は3を構築することであるが，これについてはまだほとんどわかっていない．また，実際の計算をおこなう上や物理的な直観を得る上で，ほかのステップもしばしば有用である．そこで2のステップについても簡単に見ることにする．

6.1 曲がった時空上の超弦理論

物理理論を組み立てる上で基本的な要請は

1. ローレンツ不変性
2. 量子論的確率解釈が可能であるために確率が正で，保存すること(ユニタリー性)

である．しかし，この2つの条件を同時に成り立たせることはそう簡単ではない．ゲージ理論でも，ローレンツ不変なゲージ(ファインマン・ゲージ)では時間方向のモードから負ノルム状態(ghost)が出てくる．これは負の確率を意味してしまうので，このような状態は物理的状態と結合していてはいけない．

超弦理論でも状況は同じで，物理的状態は負ノルム状態がなく，また負ノルム状態と結合していないことを示さなければいけない．物理的状態には負ノル

ム状態がないということは，ミンコフスキー時空ではたいへん良く確かめられている．この結果はノー・ゴースト定理(no-ghost theorem)として知られている[25,60]．

もちろん超弦理論は重力理論であるので，われわれはブラックホールを含めて曲がった時空での超弦理論も考えなければいけない．曲がった時空としては，作用 (3.2) の解となっているものを選ぶことになるが，そもそもこの作用は摂動論としての超弦理論の無矛盾性の条件から導出される．

通常の超弦理論ではミンコフスキー時空を背景場として考え，そこからの摂動を考える．これは場の理論での摂動論的定式化と似た手続きである．曲がった時空での超弦理論も同様に，曲がった時空のメトリックを背景場と考え，摂動論を展開すればよい．しかし，この段階ではまだ古典論的な作用 (3.2) があるわけではないので，特定の背景場を仮定するのではなく任意の背景場の下での摂動論の存在を仮定する．古典論的な作用は，古典場からの摂動展開が存在するという無矛盾性の条件から選ばれる．ミンコフスキー時空の場合の超弦理論の次元，10 次元もこのようにして発見されたものである．また §4.2 で見た古典論的な厳密解も，式 (3.17) のような補正をすべて加えて求めるわけではなく，このような条件を直接課して求められた．

しかし曲がった時空での超弦理論については，背景場の選び方以外，現在のところあまりよくわかっていない．実際，簡単な例(3 次元反ド・ジッター時空)では，単純に量子化すると負ノルム状態が物理的状態に残ってしまうことが知られている[5,8]．

このことは曲がった時空での超弦理論が無矛盾には作れないことを意味しているわけではない．超弦理論は，ミンコフスキー時空上では摂動論的には矛盾のない量子重力理論になっていることがわかっている．また近年の進歩，特にブラックホール・エントロピーの微視的導出は，重力の強い非摂動論的な領域でも超弦理論が量子重力理論として十分な資格を備えていることを意味している．このような量子重力理論が，曲がった時空で破綻してしまうとは考えにくい．

超弦理論は，現在のところ「理論」といっても十分な定式化がなされているわけではないので，理論の構築に必要な手続きが十分にわかっているわけではない．理論の構築は，どちらかというとトライアル・アンド・エラーを通じて

表 6.1　超弦理論に現れるブレーンの種類

ブレーンの種類	質量	重力の強さ $\sim GM$	ミンコフスキー極限
NS1 ブレーン	$O(1)$	$O(g_s^2)$	弦
NS5 ブレーン	$O(1/g_s^2)$	$O(1)$	なし
RR ブレーン	$O(1/g_s)$	$O(g_s)$	D ブレーン

おこなわれている．したがって，負ノルム状態の問題は，構築に必要な手続きを手探りで探し求めなければいけないことに起因している．いったんこのような手続きがわかるか，超弦理論が十分に定式化されれば，このような問題はなくなるに違いない．

なお，前述の反ド・ジッター空間については，スペクトルを適当に制限してやることによって，ノー・ゴースト定理が証明できることが知られている[19)]．しかし，スペクトルに制限を与えるという手続きが，ユニタリー性と本当に矛盾がないかどうかはまだはっきりしていない．スペクトルを単純に手で落としてしまうと，一般にはユニタリー性を破ることになるし，相互作用を考え出すと，手で落とした状態が生成されてしまう可能性もある．

ちなみに，このような手続きをしない場合，もっとも一般的な時空に対するノー・ゴースト定理は現在，文献 3) で与えられている．

6.2　ブレーンの超弦理論的記述

§3.4 では超弦理論に現れるブレーンの種類を分類した．表 6.1 では，それぞれのブレーンの質量を結合定数のオーダーとして表示した．重力ポテンシャルは GM/r なので，ブレーンの作る重力場の強さは GM で表される．また超弦理論では $G = O(g_s^2)$ である．したがってブレーンの作る重力の強さは，NS1 ブレーンは $GM = O(g_s^2)$, NS5 ブレーンは $GM = O(1)$, RR ブレーンは $GM = O(g_s)$ となる．これは結合定数 g_s を弱くしていくと，NS1 ブレーンと RR ブレーンに対しては重力をいくらでも弱くできるということを意味する．

したがって，NS1 ブレーンと RR ブレーンに対してはミンコフスキー時空での記述が可能なはずである．しかも，この極限で時空はミンコフスキー時空に帰着するので，ブラックホールのような特異的でない記述が可能なはずであり，

このため量子論的な記述も可能になっているはずである．実際，BPS 極限では NS1 ブレーンの場合は弦そのもの，RR ブレーンの場合は D ブレーン (D-brane) と呼ばれる状態[58)]がそれに当たる．

7章 ブラックホールの量子論的問題

2章で見たホーキング放射の発見により，ブラックホールの法則と熱力学の法則との対応は明確になった．このためブラックホール・エントロピーも，真の統計力学的なエントロピーであると考えられる．しかしエントロピーは量子論的に初めて説明できるので，ブラックホール・エントロピーを実際に導くためには量子論を考える必要がある．実際，ブラックホール・エントロピー (2.6) はプランク定数 $\hbar$ を含んでいるため，プランク定数ゼロの古典極限では無限大になってしまう．

ホーキング放射の導出では，物質場の量子効果のみを考え，重力場は古典論的に扱われている．しかし，このような重力の半古典論的近似では，ブラックホール・エントロピーを十分満足に導出することはできない[71)]．そこで§7.4では，超弦理論がブラックホール・エントロピーをどう説明するかを見ていく．しかしその前に，ホーキング放射がもたらした意味について，もう少し考えておく必要がある．

7.1 一般化された第2法則

ブラックホールが蒸発していくと，ホライズンの面積 A は減少する．これはブラックホールの第2法則に反するように思えるが，これはこの法則がヌル・エネルギー条件を仮定しているからである．この仮定の存在は自然である．エネルギー条件がなければ，$E>0$ と $E<0$ の粒子を対消滅させることで，いくらでもエントロピーを減らすことができるからである．しかし，量子論的には仮想過程を通してまさにこのような過程が起こることにより，ブラックホールは蒸発していく．

しかし，ブラックホール・エントロピー $S_{\rm BH}$ と放射のエントロピー S を足し

たもの $S' = S_{\rm BH} + S$ は，常に増大すると考えられている(一般化された第2法則[9])：

$$\Delta S' \geqq 0 \tag{7.1}$$

量子論的に意味のある第2法則は，この一般化された第2法則である*．ここで S は通常の統計力学的なエントロピーであるので，S' が意味をなすには $S_{\rm BH}$ も統計力学的なエントロピーである必要がある．このことからも，やはり $S_{\rm BH}$ は統計力学的に導出されなければならない．

7.2　インフォメーション・パラドックス

さて，ホーキング放射はブラックホールの法則の意味を明らかにした一方で，深刻な問題も引き起こした．ブラックホールはホーキング放射により，しだいに蒸発していく．ブラックホールが何も残さずに蒸発しきったとすると，どうなるのか？　ホーキング放射は熱放射であるので，これは始状態を指定しても終状態は確率的にしか予言できないことを意味する．ここでいう確率は，量子力学的な確率のことではなく，統計力学的な確率のことであることに注意されたい．この2つの確率は全く違った概念である．

量子力学の言葉を使えば，ブラックホールを純粋状態(pure state)から作ったとすると，当初の純粋状態が混合状態(mixed state)に遷移したことになる．しかし，量子力学では時間的発展がユニタリーである限り，純粋状態は混合状態に遷移することはない．こうして，われわれはパラドックスに直面することになってしまう．量子力学による予言を突き詰めていくと，量子力学と矛盾してしまう点がパラドックスである．このパラドックスも，ホーキングによって初めて議論された[34]．もっとも，これは問題の一部でしかない．この問題については，次節でさらに詳しく議論する．

この問題は太陽とどう違うのだろうか？　例えば，辞典を太陽に投げ落としたとすると，辞典は燃え尽き太陽からは熱放射のみが観測される．このためブラックホールと同じく，現実的には辞典の「情報」は失われてしまう．しかし，

* このことは，何も古典論的な第2法則に意味がないという意味ではない．例えば，2つのブラックホールが合体する過程で，エネルギーの一部は重力波として運ばれる．しかし第2法則から，(複雑なダイナミクスを解くことなしに)放出されるエネルギーに上限をつけることができる．

太陽が量子力学に矛盾するとは誰も考えない．なぜだろうか？　これは太陽の場合，原理的には微視的な状態を追跡できるという確信があるからである．太陽からの放射は実は厳密には熱放射ではない．そして熱放射からのズレの知識から，辞典の「情報」を再構成できるはずである．熱放射からのズレが「情報」を運んでいるのである．太陽の放射を熱放射というのは，太陽の微視的状態のアンサンブル平均をとった上のことである．

ブラックホールの場合はそうはいえない．ブラックホールに落とされた辞典はホライズンを横切るはずである．ところがホライズンの中からは信号を外に送ることはできない．したがって，この場合もホーキング放射が厳密には熱放射ではなく情報を運んでいるとすると，因果律もしくは局所性を破ることになってしまう．

要するに，ブラックホール・エントロピーがエントロピーであることを示すには，微視的状態を数え上げる必要がある．また，インフォメーション・パラドックスを解くためにも，微視的状態を追跡できることが望ましい．しかし，これらは重力の半古典論的近似では答えられない．

7.3　パラドックスの解決方法

前節で，ホーキング放射がもたらす問題を議論した．しかし，実は真の問題はこれからである．パラドックスが生じるのは，議論に含まれていた仮定が何か間違っているからである．どの仮定が間違っているのかについては，これまでに様々な提案がなされている．真の問題は，どの修正も基礎的な概念に大きな変更が強いられる点である(図 7.1)：

1. 「情報」は本当に失われる．このシナリオは 2 種類存在する：
   (a) 量子力学は修正しなくてはならない[34]．しかし，このシナリオではエネルギー・運動量が保存しない可能性が高い[6]．これは基本的には情報の伝達にはエネルギーが必要であり，したがって情報が失われることはエネルギーが失われることを意味するからである．量子力学的にはこのようなプロセスは，仮想的なブラックホールが生成・消滅するような仮想過程としても起こりうるはずである．しかしその場合，いたるところで

	↗	非ユニタリー（1a）	⇒	エネルギー保存則の破れ？
情報：失われる				
	↘	ベイビー・ユニバース（1b）	⇒	予言不可能？
	↗	ホーキング放射中に（2a）	⇒	因果律・局所性の破れ？
情報：再放出				
	↘	蒸発の最終段階で（2b）		
		⇓		
		莫大な時間，事実上安定		
	↙			
情報：蓄えられる（3）	⇒	対生成の確率：発散？ 面積則の解釈？		

図 7.1　インフォメーション・パラドックスの主な解決法．いずれのシナリオも基礎的な法則に大きな変更が強いられる．

エネルギー保存則が成り立たないことになる．したがってホーキングによる量子力学の修正は，特定の場合にはランダムなソース(熱浴)のある量子力学に帰着する．熱浴のある場合は，エネルギーを加えたり取り除くことが許されるため，当然エネルギー保存則は成り立たない．このような保存則の破れが小さい効果であれば問題はなかろうが，この効果は大きいとされる．

(b) この考えは，何らかの効果により(例えば量子重力効果)ブラックホール特異点の代わりに，ベイビー・ユニバース(baby universe)が生み出されることを仮定する[18,61]．情報は別の宇宙に運ばれるため，われわれの宇宙からは失われる．しかし全体としては失われないというシナリオである．シナリオ (a) の問題を避けるためには，エネルギー・運動量の保存則に反してはいけない．そこで，このベイビー・ユニバースの全エネルギー・運動量は 0 でなくてはならない．このため不確定性原理により，いつどこでベイビー・ユニバースができたかは指定できないことになる．したがってベイビー・ユニバースの状態は，われわれの宇宙にとっては大域的なパラメータという性格をもつ．結局，このことはベイビー・ユニバースの状態によって決まる多くのパラメータが存在するということに

なる[14,23]．これは特に問題ではないが，基礎的な法則によってパラメータを予言するという希望をうち砕くことになる．この問題と宇宙項問題についての関連も，以前活発に議論された．

2. 「情報」は漏れだしている．量子力学は修正しなくてもよい．このシナリオにも2種類存在する：

(a) 重力崩壊・ホーキング放射のプロセスで「情報」が漏れだしている．これはもっとも保守的な見方であるが，前節で見たように，どうしてこのシナリオを因果律・局所性に反せずに実現できるのかは不明である．したがって，この保守的な見方はブラックホールに対する認識を大きく変える可能性がある．

(b) 大きなブラックホールに対しては，ホーキングの計算は十分よい近似である．そこでブラックホールがプランク・サイズ程度になって，蒸発しきるときに情報が放出される．しかし残った少量のエネルギーで大量の情報を放出するには，莫大な数の非常に低エネルギーの粒子を用いるしかない．このため，このプロセスには長い時間をかけなければならない[1,13,62]．したがって，このシナリオは3に帰着する．ある簡単な見積もりによると[62]，このプロセスには最低

$$\tau_{\mathrm{remnant}} \sim \left(\frac{M}{m_{\mathrm{pl}}}\right)^4 t_{\mathrm{pl}} \tag{7.2}$$

程度の時間をかけなければいけない．大きなブラックホールが放射により小さくなるまでの時間が，式 (2.10) より $\tau_{\mathrm{BH}} \sim M^3$ 程度と見積もられていることを考えるとこの時間はきわめて長い．またプランク・サイズ程度の物体が，これほどの寿命を保ちうるダイナミクスも定かではない[61]．

3. 2(b) のシナリオで，蒸発しきる代わりに微視的なものが残る (remnant)．これが「情報」を蓄えている[1]．しかしある特定の remnant を適当なバックグラウンドの下で対生成させる確率は小さくとも有限であり，一方情報の種類により無限個の種類の remnant が存在する．したがって，これでは対生成の全確率は発散してしまう．このことはわれわれの宇宙が不安定であることを意味する．さらにこのアプローチではプランク・スケール程度

の小さな物体に多くの情報を蓄えさせるが，このことは remnant が大きな内部自由度，縮退度をもつことを意味する．しかし，ブラックホール・エントロピーの面積則 (2.6) は，縮退度とブラックホールの大きさの間に関係があることを示唆する．したがって，このシナリオではエントロピーとホライズンの面積との間の深い関係を損なってしまう．

まとめると，このパラドックスが難解である理由は，量子力学を放棄しなければいけないからではない．真の問題は

パラドックスを解決しようとするいかなる試みも，基礎的な概念であるエネルギー保存則[1(a)]・因果律や局所性[2(a)]・安定性[2(b), 3]などを放棄することになる

という点にある．

§7.4 では，超弦理論によるブラックホール・エントロピーの解釈について議論する．そこで見るように，この種の計算ではシナリオ 2(a) を支持するように思える．そこで最近の潮流は，シナリオ 2(a) によってインフォメーション・パラドックスが解決されると思われている．このシナリオを具体化する試みについては §7.5 で見ることにする．

7.4　エントロピーの微視的導出

§6.2 では，結合定数を弱くすることによってブラックホールが弦や D ブレーンといった量子化が可能な物体と関係づけられることを見た．ところで，エネルギーを指定しても弦の固有振動はひとつではない．つまり，ひとつの質量をもつ弦の状態は複数存在する．一般にこのような状態はすべてブラックホールになるであろう．しかしノー・ヘア定理から，ある質量をもつブラックホールはひとつしかない．したがって，質量 M の弦の状態はすべて同じブラックホールになるはずである．

ところで統計力学では，(エントロピー) = log (系の縮退度) である．したがって，ブラックホール・エントロピーは，このような縮退度の対数なのではないだろうか？　つまり

$$S_{\rm BH} \stackrel{?}{=} \log\,(\text{弦の状態の縮退度}) \tag{7.3}$$

実際に少し調べてみると，定性的にはこの関係がよく成り立っていることが知られている[41,53,67]．

しかし，このままではエントロピーの係数まで導くことはできない．弦がブラックホールに「遷移する」点は，強結合の領域 $g_s \gg 1$ であることが期待される(§6.2)．しかしこの領域では超弦理論の弱結合近似が信頼できなくなってしまうので，弱結合での弦の状態数の結果は使えない．実際，シュワルツシルト解のエントロピーは

$$S_{\text{BH}} \sim \frac{A}{G} \sim GM^2 \tag{7.4}$$

で与えられるが，これと超弦理論の質量 M での縮退度とは単純には比較できない．なぜならば結合定数を大きくしていくと，相互作用，特に重力の作用が強くなってくるからである．重力場のエネルギーは負であるため，重力の影響は超弦理論の各状態の質量を小さくするように働く．つまり，超弦理論の質量 M の状態からスタートしても，質量 M のブラックホールにはなりえない．質量 M のブラックホールを作るには $M' \gg M$ の状態から始めなくてはいけない．

結局，質量 M が結合定数 g_s を変化させると変わっていくのである．場の理論ふうにいうと，質量が「繰り込まれる」のである．しかし，もしもエントロピーの式が繰り込みを受けない量でのみ書けていれば，このエントロピーは強結合においても成り立つことが期待される．

そこで，§3.3 で見たような BPS 解を思い出そう．極限ブラックホールに対しては，エントロピーは繰り込まれない．例えば，この発展においてよく調べられたブラックホールのエントロピーは

$$S_{\text{BH}} = 2\pi\sqrt{Q_1 Q_5 n} \tag{7.5}$$

の形をしている．ここで Q_1, Q_5, n は，このブラックホールのもつ様々な電荷であり，単なる整数である．これらの電荷は，基本的にはトポロジカルな理由から量子補正をまぬがれる．例えば電磁気学でも，磁荷があると電荷が量子化される(ディラックの量子化条件)．

したがってブレーンの適当な状態を考えるのではなく，BPS 状態を使えば式(7.3) を確かめられよう．しかし，ここで今度は超重力理論の方が問題となってくる．超重力理論には超弦理論的な様々な補正がある(§3.5)．超重力理論から

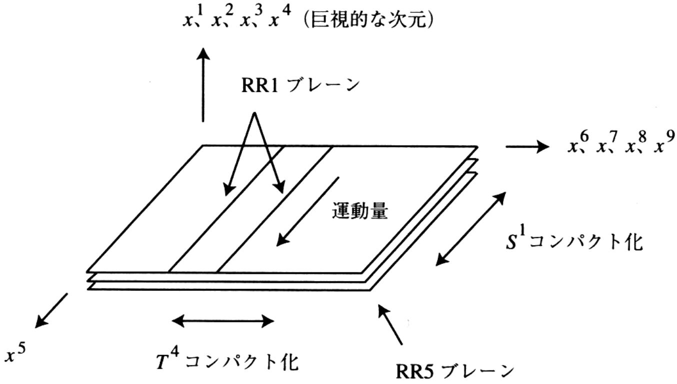


図 7.2　RR1 ブレーンと RR5 ブレーンを使って 5 次元極限ライスナー-ノルドストリューム・ブラックホールを作る．6 ～ 9 方向は 4 次元トーラスにコンパクト化され，5 方向は S^1 コンパクト化されている．

求めたブラックブレーンの多くは，BPS 極限で特異点がホライズンと一致するため，これらの補正がホライズン近傍で無視できない．つまり，超重力理論の多くの解はホライズンでは信頼できない．しかし，ホライズンで解が信頼できないとなると，面積則 (2.6) で見積もるブラックホール・エントロピー自体も信頼できないことになってしまう．

このため信頼できる超重力理論の解が必要になるが，これは適当な種類のブレーンを組み合わせて，数種類の電荷を与えればよいことがわかっている．Type IIB 超弦理論の場合，これを実現するひとつの方法は以下の通りである[12,44,66]．この超弦理論には，RR1 ブレーンおよび RR5 ブレーンが存在する．この 2 種類のブレーンを以下のように組み合わせる (図 7.2)：

- Q_1 本の重なった RR1 ブレーン．
- Q_5 枚の重なった RR5 ブレーン．RR1 ブレーンは，この RR5 ブレーンの中に埋め込まれている．
- RR1 ブレーン方向に運動量を与える．

一見複雑に見えるこの配位は，上で述べた問題を避けるためにすぎない．

これは 10 次元時空の中の空間的に広がった物体である．しかし，ここでブレーンの伸びた方向 $(x^5, x^6, x^7, x^8, x^9)$ をコンパクト化すれば，5 次元の極限ブ

ラックホールができることになる．こうしてできたブラックホールは，特別な場合は5次元極限ライスナー-ノルドストリューム・ブラックホールになる．5次元のライスナー-ノルドストリューム解は，4次元の場合 (3.5) と非常によく似ている．特にブレーン解とは違い，ホライズンで曲率は強くなってはいない．また，この解は5次元のアインシュタイン-ヒルベルト作用の解なので，ディラトンも明らかに定数である．これらの理由から，ホライズンでは§3.5の補正は無視できる．

このようにしてできたブラックホールのエントロピーは式 (7.5) で与えられる．これと係数も含めて同じ結果が，Dブレーンの縮退度から計算されている．式 (7.5) のエントロピーは複数のパラメータの関数であり，これが偶然一致したとは考えにくい．

7.5　パラドックスの解決，あるいは量子重力理論の構築にむけて

前節のような議論を極限に近いブラックホールにも適用することで，ホーキング放射が正しく導出されている[12)]．超弦理論は，通常の量子力学の原理に従って構築されており，Dブレーンは通常の量子力学系である．熱放射が得られるのは，太陽の放射と同じくアンサンブル平均をとることによる．このため，Dブレーンの立場ではインフォメーション・パラドックスの問題はない．つまりDブレーンの計算によれば，§7.3のシナリオ2(a) を支持することになる．

もっとも，極限に近いブラックホールはBPS状態ではないため，一般には強結合極限は正当化できない．にもかかわらず，なぜブラックホールの結果が再現できるのかはよくわかってはいない．しかも，強結合の問題をぬきにしても，Dブレーンによるホーキング放射の導出には問題があり，このままではパラドックスの十分な回答にはなっていない(詳しくは文献リストのより進んだ解説を参照)．特に，ホーキングの議論のどこが間違っていたのかを示していない．Dブレーンでの描像はミンコフスキー時空での極限であるため，ホライズンは存在しない．このため，実際にブラックホールの極限で何が起こっているのか明確ではない．これは4章で議論した，いろいろな双対性による特異点解消のシナリオとも共通した問題である．どちらも問題が解けることを主張するが，解が存在することは保証しても，問題がどう解けているのかまでは教えて

はくれない．

しかし，今回の結果は，ブラックホールが通常の量子力学系のように振る舞うことを示唆している．このため，インフォメーション・パラドックスも量子力学の枠内で解決されると考えるのが自然であろう．

§7.4 で議論した発展によって，ブラックホール・エントロピーが状態の縮退度を数えたものであるという点は今や明らかである．したがって，ブラックホール・エントロピーの微視的導出自体は，以前とは違いもはやこの分野では中心的な課題ではない．代わりに以下のような課題を突き詰めるべきであろう：

- なぜ縮退度がホライズンの面積に比例するのか？
- インフォメーション・パラドックスはどのように解決されるのか？
- エントロピーに寄与する自由度はどこに「住んでいるのか？」 特に，なぜ D ブレーンの状態数がエントロピーと関係するのか？

インフォメーション・パラドックスをシナリオ 2(a) で解決するひとつの方法としては，ブラックホール相補性(black hole complementary)の考えがある[70]．これは，

> 遠方の観測者にとっては，ホライズンのすぐ外側に「引き伸ばされたホライズン」(stretched horizon) という一種の「物理的な実体」，メンブレーンがある

という考えである．「物理的な実体」という意味は，ブラックホールを量子的な取り扱いをしたときに，引き伸ばされたホライズンが微視的な自由度をもつような取り扱いができるという主張である．したがって，この引き伸ばされたホライズンは重力崩壊のプロセスで情報を蓄え，またホーキング放射の過程で情報を送り返すことができる．

情報がこのようにホライズンに蓄えられるという見方は，奇異に聞こえるかもしれない．遠方の観測者にとっては，ホライズンという場所は特殊な場所である．しかしホライズンを横切る観測者にとっては，ホライズンは特殊な場所ではなく，もちろんメンブレーンのような物体にも出会わないはずである．また情報がホライズンに蓄えられるようには思えないはずである．近代的なブラックホールの見方は，ホライズンが何ら特別な場所ではないという点を強調しつつ発展してきた．このような主張は，そのような流れに反しているように聞こ

表 7.1　重力の諸問題と一般相対論，超弦理論の「星取り表」．× はその枠内では問題が解けないことがほぼ確実なもの，△ は問題が解ける場合もあること，○ はその枠内で解けることを意味する．

問　題	一般相対論	超弦理論		
		場の古典論	古典論	量子論
特異点問題	×	△	△	?
宇宙検閲仮説	?	?	?	−
トポロジー変化	×	×	△	?
ブラックホール・エントロピー	?	−	−	○
インフォメーション・パラドックス	?	−	−	?

えるかもしれない．

しかしブラックホール相補性の原理は，落ちていく観測者にとっても引き伸ばされたホライズンという実体があり，情報が蓄えられると述べているのではない．主張は，落ちていく観測者と遠方の観測者の観測の間に相補性があるというものである．遠方の観測者にとってのメンブレーンの存在は，落ちていく観測者にとってホライズンが特殊な場所ではないという観測と同等に有効であると主張する．そして実際に，ホライズンに微視的な自由度が蓄えられるような量子重力の定式化が存在すると述べているのである．

なお，このような主張と似たアプローチとしては，ソーン(Thorne)らによるメンブレーン・パラダイム(membrane paradigm)の考えがある[73]．彼らは量子重力を考えているわけではないが，ブラックホールの古典論的なプロセスは，ホライズンが一種の物理的な実体と考えることで説明できるというものである．ブラックホール相補性の原理は，メンブレーン・パラダイムに影響を受けたもので，それをさらに量子論の段階にまで発展させようという試みであろう．これは興味深い可能性ではあるが，現在のところ実際にどうこの原理を定式化すべきかはっきりしていない．

ブラックホール相補性の原理は，ブラックホールという 3 次元の物体の自由度が，ホライズンという 2 次元面で表されるという見方でもある．このようなアプローチを突き詰めた考えとして，ホログラフィック原理(holographic principle)がある[10,68,72]．この原理によると，量子重力理論ではブラックホールに限ら

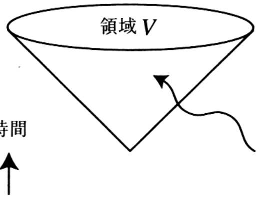


図 7.3　entropy bound．因果的な影響を及ぼしあえる範囲内のエントロピー S は，境界の面積 A 以下でなければならない．このようなエントロピーは，境界 B から出る「内向きの」ヌル超曲面を通ったものである．

ず，3 次元空間での物理は，適当な 2 次元面での理論によって記述されなければならない．

この原理のひとつの帰結として，すべての自由度は何らかの 2 次元面上の自由度として表されるはずである．したがって，ブラックホールに限らず

$$S \leqq \frac{A}{4G} \tag{7.6}$$

という条件(entropy bound)が成り立っていなければならない．ここで S は領域 V のエントロピー，A は V の境界 B の面積である(図 7.3)．ブラックホールの場合は B はホライズン，S はブラックホール・エントロピー S_{BH} であり，この場合は等号が成立している．もっとも一見すると，一般的な状況ではこのような単純な条件は期待できそうにない．今，考えている系の長さのスケールを L とすると，通常の統計系では $S \sim L^3$，$A \sim L^2$ となる．このため十分に大きなスケールでは，式 (7.6) は破られうる．

しかし，単純に領域 V のエントロピーを考えるのではなく，因果的な影響を及ぼしあえる範囲内のエントロピーに限定すると，一般的な状況でも満たされている[11)]．また §7.1 で議論した一般化された第 2 法則は，この entropy bound から導かれることが知られている．これだけでは原理のひとつの状況証拠であり，原理を実現したことになってはいない．しかし反ド・ジッター空間の場合には，実際に超弦理論はこの原理を実現しているようである(重力／ゲージ理論双対性)．

付録：より進んだ解説

本解説で扱った話題についてさらに詳しく学びたい読者のために，ここでは総合報告に限って紹介することにする．また本稿では参考文献の数を最低限にとどめるため，教科書で引用されている標準的な文献はあまり引用せず，教科書等を引用した．標準的な文献を探す際にも，以下の文献を参考にして欲しい．

2 章：一般相対論の教科書としては文献 52,63,78,81)．様々なノー・ヘア定理とその現状については文献 37)．ディラトンのようなスカラー場の存在に対する実験・観測からの制限については文献 16,82)．

3 章：超弦理論の最近の進展も含めた最新の教科書としては文献 60)．一般向けの解説としては文献 59,84,85)．超弦理論におけるブラックホールについては文献 51,55)．

4 章：T 双対性については文献 24)．

5 章：超弦理論におけるトポロジー変化についての詳しい解説は文献 28,65)．また，このトポロジー変化の発見者の一人が一般向けの本を書いており，その中でも詳しく取り上げられている[26)]．一般相対論における宇宙検閲仮説の現状については文献 79)．

7 章：インフォメーション・パラドックスについては文献 32,54,62)．一般向けの解説としては文献 69)．ここではブラックホール相補性についても簡単に触れられている．超弦理論を使ったブラックホール・エントロピーの厳密な導出については文献 38)．一般向けの解説としては文献 53)．またホログラッフィク原理については文献 10)，この原理を具体化している超弦理論については文献 2)．entropy bound については文献 10,80)．

参考文献

1) Y. Aharonov, A. Casher & S. Nussinov : The unitarity puzzle and Planck mass stable particles, *Phys. Lett.*, **B191**, 51 (1987)
2) O. Aharony, S. S. Gubser, J. Maldacena, H. Ooguri & Y. Oz : Large N field theories, string theory and gravity, *Phys. Rept.*, **323**, 183 (2000) [hep-th/9905111]
3) M. Asano & M. Natsuume : The no-ghost theorem for string theory in curved backgrounds with a flat timelike direction, *Nucl. Phys.*, **B588**, 453 (2000) [hep-th/0005002]
4) P. S. Aspinwall, B. R. Greene & D. R. Morrison : Multiple mirror manifolds and topology change in string theory, *Phys. Lett.*, **B303**, 249 (1993) [hep-th/9301043]; Calabi-Yau moduli space, mirror manifolds and spacetime topology change in string theory, *Nucl. Phys.*, **B416**, 414 (1994) [hep-th/9309097]
5) J. Balog, L. O'Raifeartaigh, P. Forgacs & A. Wipf : Consistency of string propagation on curved space-times: An SU(1,1) based counterexample, *Nucl. Phys.*, **B325**, 225 (1989)
6) T. Banks, L. Susskind & M. E. Peskin : Difficulties for the evolution of pure states into mixed states, *Nucl. Phys.*, **B244**, 125 (1984)
7) J. M. Bardeen, B. Carter & S. W. Hawking : The four laws of black hole mechanics, *Commun. Math. Phys.*, **31**, 161 (1973)
8) I. Bars & D. Nemeschansky : String propagation in backgrounds with curved space-time, *Nucl. Phys.*, **B348**, 89 (1991)
9) J. D. Bekenstein : Black holes and entropy, *Phys. Rev.*, **D7**, 2333 (1973); J. D. Bekenstein : Generalized second law of thermodynamics in black hole physics, *Phys. Rev.*, **D9**, 3292 (1974)
10) D. Bigatti & L. Susskind : TASI lectures on the holographic principle, hep-th/0002044
11) R. Bousso : The holographic principle for general backgrounds, *Class. Quant. Grav.*, **17**, 997 (2000) [hep-th/9911002] およびその参考文献
12) C. G. Callan & J. M. Maldacena : D-brane approach to black hole quantum mechanics, *Nucl. Phys.*, **B472**, 591 (1996) [hep-th/9602043]

13) R. D. Carlitz & R. S. Willey : The lifetime of a black hole, *Phys. Rev.*, **D36**, 2336 (1987)
14) S. Coleman : Black holes as red herrings: Topological fluctuations and the loss of quantum coherence, *Nucl. Phys.*, **B307**, 867 (1988); S. Coleman : Why there is nothing rather than something: A theory of the cosmological constant, *Nucl. Phys.*, **B310**, 643 (1988)
15) A. Dabholkar, G. Gibbons, J. A. Harvey & F. Ruiz Ruiz : Superstrings and solitons, *Nucl. Phys.*, **B340**, 33 (1990)
16) T. Damour : Gravitation, experiment and cosmology, gr-qc/9606079
17) L. Dixon, J. A. Harvey, C. Vafa & E. Witten : Strings on orbifolds, *Nucl. Phys.*, **B261**, 678 (1985); Strings on orbifolds. 2, *Nucl. Phys.*, **B274**, 285 (1986)
18) F. Dyson : Breakdown of physics in gravitational collapse, unpublished (1976)
19) J. M. Evans, M. R. Gaberdiel & M. J. Perry : The no-ghost theorem for AdS_3 and the stringy exclusion principle, *Nucl. Phys.*, **B535**, 152 (1998) [hep-th/9806024]
20) R. P. Geroch : Topology in general relativity, *J. Math. Phys.*, **8**, 782 (1967)
21) R. Geroch : What is a singularity in general relativity?, *Annals Phys.*, **48**, 526 (1968)
22) G. W. Gibbons, G. T. Horowitz & P. K. Townsend : Higher dimensional resolution of dilatonic black hole singularities, *Class. Quant. Grav.*, **12**, 297 (1995) [hep-th/9410073]
23) S. B. Giddings & A. Strominger : Loss of incoherence and determination of coupling constants in quantum gravity, *Nucl. Phys.*, **B307**, 854 (1988)
24) A. Giveon, M. Porrati & E. Rabinovici : Target space duality in string theory, *Phys. Rept.*, **244**, 77 (1994) [hep-th/9401139]
25) M. B. Green, J. H. Schwarz & E. Witten : Superstring theory (Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1987)
26) B. R. Greene : The elegant universe: Superstrings, hidden dimensions, and the quest of the ultimate theory (W. W. Norton and Co., New York, 1999); 邦訳は林一，林大訳：エレガントな宇宙，草思社 (2001)
27) B. R. Greene, D. R. Morrison & A. Strominger : Black hole condensation and the unification of string vacua, *Nucl. Phys.*, **B451**, 109 (1995) [hep-th/9504145]
28) B. R. Greene : String theory on Calabi-Yau manifolds, hep-th/9702155

29) R. Gregory & R. Laflamme : Black strings and p-branes are unstable, *Phys. Rev. Lett.*, **70**, 2837 (1993) [hep-th/9301052]
30) S. S. Gubser : Curvature singularities: The good, the bad, and the naked, hep-th/0002160
31) R. Gueven : Plane waves in effective field theories of superstrings, *Phys. Lett.*, **B191**, 275 (1987)
32) J. A. Harvey & A. Strominger : Quantum aspects of black holes, hep-th/9209055
33) S. W. Hawking : Black hole explosions, *Nature*, **248**, 30 (1974); Particle creation by black holes, *Commun. Math. Phys.*, **43**, 199 (1975)
34) S. W. Hawking : Breakdown of predictability in gravitational collapse, *Phys. Rev.*, **D14**, 2460 (1976)
35) S. W. Hawking & G. F. R. Ellis : The large scale structure of spacetime (Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1973)
36) S. W. Hawking & R. Penrose : The singularities of gravitational collapse and cosmology, *Proc. Roy. Soc. Lond.*, **A314**, 529 (1970)
37) M. Heusler : Black hole uniqueness theorems (Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1996)
38) G. T. Horowitz : The origin of black hole entropy in string theory, gr-qc/9604051; Quantum states of black holes, gr-qc/9704072
39) G. T. Horowitz & K. Maeda : Fate of the black string instability, *Phys. Rev. Lett.*, **87**, 131301 (2001) [hep-th/0105111]
40) G. T. Horowitz & R. Myers : The value of singularities, *Gen. Rel. Grav.*, **27**, 915 (1995) [gr-qc/9503062]
41) G. T. Horowitz & J. Polchinski : A correspondence principle for black holes and strings, *Phys. Rev.*, **D55**, 6189 (1997) [hep-th/9612146]; Self gravitating fundamental strings, *Phys. Rev.*, **D57**, 2557 (1998) [hep-th/9707170]
42) G. T. Horowitz & A. R. Steif : Space-time singularities in string theory, *Phys. Rev. Lett.*, **64**, 260 (1990)
43) G. T. Horowitz & A. Strominger : Black strings and p-branes, *Nucl. Phys.*, **B360**, 197 (1991)
44) G. T. Horowitz & A. Strominger : Counting states of near-extremal black holes, *Phys. Rev. Lett.*, **77**, 2368 (1996) [hep-th/9602051]
45) G. T. Horowitz & A. A. Tseytlin : On exact solutions and singularities in string theory, *Phys. Rev.*, **D50**, 5204 (1994) [hep-th/9406067]
46) G. T. Horowitz & D. L. Welch : Exact three-dimensional black holes in string theory, *Phys. Rev. Lett.*, **71**, 328 (1993) [hep-th/9302126]

47) W. Israel : Third law of black-hole dynamics: A formulation and proof *Phys. Rev. Lett.*, **57**, 397 (1986)
48) N. Itzhaki, J. M. Maldacena, J. Sonnenschein & S. Yankielowicz : Supergravity and the large N limit of theories with sixteen supercharges, *Phys. Rev.*, **D58**, 046004 (1998) [hep-th/9802042]
49) C. V. Johnson, A. W. Peet & J. Polchinski : Gauge theory and the excision of repulson singularities, *Phys. Rev.*, **D61**, 086001 (2000) [hep-th/9911161]
50) J. Maldacena & C. Nunez : Supergravity description of field theories on curved manifolds and a no-go theorem, *Int. J. Mod. Phys.*, **A 16**, 822 (2001) [hep-th/0007018]
51) D. Marolf : String/M-branes for relativists, gr-qc/9908045
52) C. W. Misner, K. S. Thorne, & J. A. Wheeler : Gravitation (W. H. Freeman, San Francisco, 1973)
53) 夏梅 誠：超弦理論はブラックホールの謎を解けるか？, 日本物理学会誌 **54**, 178 (1999) 1999 年 3 月号; ブラックホールの謎に迫りつつある超弦理論, パリティ 2000 年 7 月号
54) D. N. Page : Black hole information, hep-th/9305040
55) A. W. Peet : TASI lectures on black holes in string theory, hep-th/0008241
56) R. Penrose : Gravitational collapse: The role of general relativity, *Riv. Nuovo Cim.*, **1**, 252 (1969)
57) R. Penrose : Singularities and time asymmetry, In General relativity: An Einstein centenary survey, eds. S. W. Hawking & W. Israel (Cambridge Univ. Press, Cambridege, 1979)
58) J. Polchinski : Dirichlet-branes and Ramond-Ramond charges, *Phys. Rev. Lett.*, **75**, 4724 (1995) [hep-th/9510017]
59) J. Polchinski : String duality: A colloquium, *Rev. Mod. Phys.*, **68**, 1245 (1996) [hep-th/9607050]; Quantum gravity at the Planck length, *Int. J. Mod. Phys.*, **A14**, 2633 (1999) [hep-th/9812104]
60) J. Polchinski : String theory (Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1998)
61) J. Polchinski & A. Strominger : A possible resolution of the black hole information puzzle, *Phys. Rev.*, **D50**, 7403 (1994) [hep-th/9407008]
62) J. Preskill : Do black holes destroy information?, hep-th/9209058
63) B. F. Schutz : A first course in general relativity (Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1985); 邦訳は江里口良治，二間瀬敏夫訳：相対論入門，丸善 (1988)
64) A. Strominger : Massless black holes and conifolds in string theory, *Nucl. Phys.*, **B451**, 96 (1995) [hep-th/9504090]

65) A. Strominger : Black hole condensation and duality in string theory, *Nucl. Phys. Proc. Suppl.*, **46**, 204 (1996) [hep-th/9510207]

66) A. Strominger & C. Vafa : Microscopic origin of the Bekenstein-Hawking entropy, *Phys. Lett.*, **B379**, 99 (1996) [hep-th/9601029]

67) L. Susskind : Some speculations about black hole entropy in string theory, hep-th/9309145

68) L. Susskind : The world as a hologram, *J. Math. Phys.*, **36**, 6377 (1995) [hep-th/9409089]

69) L. Susskind : Black holes and the information paradox, *Scientific American*, April 1997 [邦訳：日経サイエンス 1997 年 7 月号]

70) L. Susskind, L. Thorlacius & J. Uglum : The stretched horizon and black hole complementarity, *Phys. Rev.*, **D48**, 3743 (1993) [hep-th/9306069]

71) G. 't Hooft : On the quantum structure of a black hole, *Nucl. Phys.*, **B256**, 727 (1985)

72) G. 't Hooft : Dimensional reduction in quantum gravity, gr-qc/9310026

73) K. S. Thorne, R. H. Price & D. A. Macdonald : Black holes: The membrane paradigm (Yale Univ. Press, New Haven, 1986)

74) F. J. Tipler : Singularities and causality violation, *Annals Phys.*, **108**, 1 (1977)

75) F. J. Tipler, C. J. S. Clarke & G. F. R. Ellis : Singularities and horizons - A review article, In General relativity and gravitation: One hundred years after the birth of Albert Einstein, ed. A. Held (Plenum Press, New York, 1980)

76) A. A. Tseytlin : On singularities of spherically symmetric backgrounds in string theory, *Phys. Lett.*, **B363**, 223 (1995) [hep-th/9509050]

77) A. Vilenkin : Cosmic strings and domain walls, *Phys. Rept.*, **121**, 263 (1985)

78) R. M. Wald : General relativity (The Univ. of Chicago Press, Chicago, 1984)

79) R. M. Wald : Gravitational collapse and cosmic censorship, gr-qc/9710068

80) R. M. Wald : The thermodynamics of black holes, gr-qc/9912119

81) S. Weinberg : Gravitation and cosmology (John Wiley and Sons, New York, 1972)

82) C. M. Will : Theory and experiment in gravitational physics (Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1993)

83) E. Witten : Phases of $N = 2$ theories in two dimensions, *Nucl. Phys.*, **B403**, 159 (1993) [hep-th/9301042]

84) E. Witten : Duality, spacetime and quantum mechanics, *Phys. Today*, **50**, 28 (1997) [邦訳：パリティ 1997 年 12 月号]

85) 米谷民明：弦理論とは何か，何であるべきか, パリティ 1998 年 2 月号; 非摂動的弦理論の構築を目指して, 日本物理学会誌, **53**, 312 (1998), 1998 年 5 月号

86) W. H. Zurek & K. S. Thorne : Statistical mechanical origin of the entropy of a rotating, charged black hole, *Phys. Rev. Lett.*, **54**, 2171 (1985)

著者略歴

青木　慎也（あおき　しんや）
1987年　東京大学大学院理学系研究科博士課程修了
専　攻　物理学・素粒子理論
現　在　筑波大学物理学系教授　理学博士

伊藤　公平（いとう　こうへい）
1994年　カリフォルニア大学バークレー校卒業
専　攻　材料科学
現　在　慶應義塾大学理工学部助教授　Ph.D.

夏梅　誠（なつうめ　まこと）
1994年　テキサス大学オースチン校卒業
専　攻　素粒子物理学
現　在　高エネルギー加速器研究機構　Ph.D.

現代物理最前線 7

2002年12月15日　初版1刷発行

編者　大槻義彦

発行　**共立出版株式会社**／南條光章
東京都文京区小日向4丁目6番19号
電話　東京(03)3947-2511番（代表）
郵便番号 112-8700
振替口座 00110-2-57035番
URL　http://www.kyoritsu-pub.co.jp/

印刷　加藤文明社
製本　中條製本

社団法人
自然科学書協会
会員

検印廃止
NDC 420

ISBN 4-320-03392-2